



<http://dx.doi.org/10.5800/GT-2012-3-3-0073>

## RESEARCH OF INTERACTIONS BETWEEN SHEAR FRACTURES ON THE BASIS OF APPROXIMATE ANALYTICAL ELASTIC SOLUTIONS

A. S. Lermontova, Yu. L. Rebetsky

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, RAS, Moscow, Russia*

**Abstract:** The article describes a method yielding approximate analytical solutions under the theory of elasticity for a set of interacting arbitrarily spaced shear fractures. Accurate analytical solutions of this problem are now available only for the simplest individual cases, such as a single fracture or two collinear fractures. A large amount of computation is required to yield a numerical solution for a case considering arbitrary numbers and locations of fractures, while this problem has important practical applications, such as assessment of the state of stress in seismically active regions, forecasts of secondary destruction impacts near systems of large faults, studies of reservoir properties of the territories comprising oil and gas provinces.

In this study, an approximate estimation is obtained with the following simplification assumptions: (1) functions showing shear of fractures' borders are determined similar to the shear function for a single fracture, and (2) boundary conditions for the fractures are specified in the integrated form as mean values along each fracture. Upon simplification, the solution is obtained through the system of linear algebraic equations for unknown values of tangential stress drop. With this approach, the accuracy of approximate solutions is consistent with the accuracy of the available data on real fractures.

The reviewed examples of estimations show that the resultant stress field is dependent on the number, size and location of fractures and the sequence of displacements of the fractures' borders.

*Key words:* shear fracture, interaction of fractures, stresses, state of stress, analytical solution, the theory of elasticity.

**Recommended by** G.G. Kocharyan 15 August 2012

**Citation:** Lermontova A.S., Rebetsky Yu.L., 2012. Research of interactions between shear fractures on the basis of approximate analytical elastic solutions. *Geodynamics & Tectonophysics* 3 (3), 239–274. doi:10.5800/GT-2012-3-3-0073.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕЩИН СДВИГА НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. С. Лермонтова, Ю. Л. Ребецкий

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

**Аннотация:** В работе представлен метод построения приближенного аналитического решения задачи теории упругости для множества взаимодействующих произвольно расположенных трещин скола. Точное аналитическое решение подобной задачи до сих пор известно лишь для простейших частных случаев (одиночная трещина, две коллинеарные трещины), а для нахождения численного решения в произвольном случае количества и расположения трещин требуется выполнить большой объем вычислений. Между тем данная задача имеет практически важные приложения, такие как оценка напряженного состояния сейсмически активных районов, прогноз возникновения вторичных разрушений вблизи систем крупных разрывов, исследование коллекторских свойств массивов в областях формирования нефтегазоносных залежей.

Приближенность созданного аналитического решения достигается рядом упрощающих предположений, первое из которых определяет задание вида функций смещения бортов трещин, аналогичного виду функции смещения для

одиночной трещины, второе – задание краевых условий на трещинах в интегральной форме, в виде средних значений по длине трещины. Эти упрощения приводят к тому, что решение задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений сброшенных на трещинах касательных напряжений (stress drop). При этом точность полученного приближенного решения согласуется с точностью данных о реальных трещинах, известных на практике.

Приведенные в качестве примеров результаты расчетов показывают зависимость конечного поля напряжений от числа, размеров и расположения трещин, а также от очередности возникновения смещений их бортов.

**Ключевые слова:** трещины скола, взаимодействие трещин, напряжения, напряженное состояние, аналитическое решение, теория упругости.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача о напряженном состоянии среды, содержащей множество трещин скола. Решение данной задачи может быть использовано как для теоретического изучения закономерности распределения напряжений в окрестности по-разному расположенных друг относительно друга трещин, так и в прикладном аспекте для изучения природного напряжения в сейсмоактивных областях, в которых оно определяется крупными разрывами.

Отметим, что здесь мы исследуем случай, когда все трещины – сколовые, т.е. имеют только сдвиговую компоненту смещения бортов, и не рассматриваем трещины отрыва. Для того чтобы на трещинах не возникло отрывных смещений, достаточно, чтобы на каждой трещине напряжение, нормальное к ее плоскости, было сжимающим (в более общем случае – сжатие должно быть больше флюидного давления в трещинно-поровом пространстве). Это условие выполняется уже на глубинах в несколько сотен метров [Rebetsky, 2008].

Предполагается, что в рассматриваемом геологическом объекте уже существуют трещины и под действием напряжений, приложенных к внешним границам объекта, происходит новое смещение бортов трещин, не сопровождающееся ростом их длины. Подобное состояние будем именовать *активизацией* трещин. Таким образом, изучается напряженное состояние в тот период времени, когда смещение бортов трещин уже совершилось (трещины активизировались), но увеличения их длины (прорастания) или возникновения вторичных разрушений в изменившемся поле напряжений еще не произошло. Полученная информация как раз должна позволить прогнозировать, какие именно изменения произойдут с массивом в следующий момент.

Случай одиночной трещины был тщательно изучен Д.Н. Осокиной [Osokina, Friedman, 1987; Osokina, 1987a; 1987b]. Для него было найдено точное решение, в частности вид функции скачка смещений, который мы используем в упрощенной постановке задачи. Что касается совокупности нескольких трещин скальвания, то до сих пор были известны аналитические решения лишь для отдельных частных случаев (реше-

ние В.Г. Фридмана в монографии [Sobolev, Ponomarev, 2003]).

Существенным моментом, усложняющим построение решения, является то, что трещины, активизируясь, взаимодействуют между собой. В этом случае мы не можем считать вклад каждой трещины в напряженное состояние таким же, каким бы он был, если бы соседних трещин не было.

В литературе, посвященной исследованию прочности материалов, встречаются работы, в которых аналитическими методами изучаются совокупности трещин с учетом взаимодействия [Kachanov, 1993; Horii, Nemat-Nasser, 1985; Li et al., 2008; Basista, Gross, 2000; Nazarov, Polyakova, 1990]. Основное отличие этих работ от настоящей статьи состоит в том, что искомыми параметрами в них являются коэффициенты интенсивности напряжений в кончиках трещин, а поле напряжений вне маленьких окрестностей кончиков не исследуется. Кое-где изучаются упругие свойства массива в целом, но это уже следующий масштабный уровень [Kachanov, 1993]. Кроме того, большинство описанных в перечисленных работах методов применимы только к трещинам отрыва либо к сдвиговым при отсутствии трения бортов. Исключение составляет работа [Basista, Gross, 2000], в которой с применением модифицированного метода Качанова определяются коэффициенты интенсивности напряжений в кончиках сдвиговых трещин с кулоновым трением.

В случае наличия трения условия на берегах трещин можно задавать двумя способами. Первый – это задание функции скачка смещений бортов трещины [Chinnery, 1961, 1963]. В этом случае измененное напряженное состояние определяется как сумма вкладов всех трещин в его изменение (см. также [Vakulenko, Kachanov, 1971; Kachanov, 1972]). Этот способ достаточно прост в математической реализации и позволяет построить решение для множества трещин. Обычным случаем его реализации является задание постоянных смещений на трещине, подобных дислокациям в кристаллах. Недостаток способа в том, что он требует априорного знания смещений (закономерности распределения и величины) на трещинах. Но узнать смещения заранее нам неоткуда, поэтому на практике этот подход применить не удастся. Кроме того, он никак не

позволяет учесть взаимодействие трещин. Подобный способ задания на трещинах можно именовать дислокационным.

Второй способ заключается в задании на трещинах условий, определяющих остановку смещения бортов, то есть краевых условий в напряжениях, определяющих параметры сил трения на берегах трещины. Этот способ задания условий на трещинах используется в теории механики трещин [Landau, Lifshitz, 1986; Savruk, 1981; Panasyuk, 1968]. Недостатком такого способа задания краевых условий является то, что решение задачи сводится к разрешению системы сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций скачка смещений на трещинах, что требует больших вычислительных мощностей.

Предложенный в настоящей работе метод призван решить перечисленные проблемы. Во-первых, смещение на каждой трещине определяется исходя из данных о начальном нагружении, а также о расположении и размере соседних трещин. Взаимное влияние трещин учитывается в интегральном смысле, через средние сброшенные касательные напряжения  $\Delta\tau_n$ . Так, например, если трещина с номером  $i$  целиком или большей частью находится в зоне, разгруженной за счет активизации соседних с ней трещин, то значение  $\Delta\tau_i$  окажется меньше, чем если бы  $i$ -тая трещина подвергалась той же начальной нагрузке, но в отсутствие соседних трещин, а значит, меньшим будет и вклад рассматриваемой трещины в изменение напряженного состояния. Кроме того, приведенный метод выявляет зависимость напряженного состояния от последовательности активизации трещин.

Во-вторых, по сравнению с численным способом нахождения точного решения предложенный нами аналитический метод требует существенно меньших временных затрат и ресурсов. Конечно, мы получаем приближенное решение, но в практических задачах точное решение, по сути, бесполезно, поскольку на практике наши знания об условиях на разрывах неточны.

Для задания закона трения на трещине необходимо знать значение коэффициента трения в каждой точке вдоль трещины. Это значение будет связано с локальными условиями скольжения. Даже в контролируемом эксперименте по изучению хрупкого разрушения в об-

разцах, проводимом в лабораторных условиях, коэффициент трения определяется как среднее по всей поверхности разрыва [Byerlee, 1967, 1978].

В то же время в реальных задачах тектонофизики и сейсмологии часто влияние трещин на напряженное состояние изучаемого массива достаточно оценить приближенно, в виде первых членов ряда истинного решения. В сейсмологии используется понятие stress drop – сброшенные касательные на разрыве напряжения, которые являются осредненной величиной по всей длине разрыва. В сейсмологии также в виде среднего значения дается и величина смещения в очаге землетрясения. Подобное осреднение указанных параметров определяется используемой точечной моделью очага землетрясения. Только для очень сильных и разрушительных землетрясений сейсмологи используют представления о конечности размеров очага землетрясения, рассчитывая параметры сброшенных напряжений и амплитуды смещений как функции координат вдоль поверхности очага.

Резюмируя, можно сказать, что исходные данные и современные потребности знания напряженного состояния земных недр не требуют от нас построения точного решения поставленной задачи о напряжениях в окрестности множества близко расположенных трещин. Однако это решение должно не только отвечать условиям внешнего нагружения (случай, когда трещины расположены далеко друг от друга), но и позволять в некоторой интегральной (усредненной) форме оценивать взаимное влияние трещин.

В нашей работе построено приближенное аналитическое решение задачи для совокупности трещин (см. также [Rebetsky et al., 2002; Rebetskii, Lermontova, 2010]). Упрощение конечных выражений и приближенность аналитического решения достигаются тем, что в нашем решении мы задаем вид функции скачка смещений соответствующим форме скачка смещений для одиночной трещины. После этого неизвестными оказываются только амплитуды смещений, нахождение которых для множества одновременно или последовательно активизировавшихся трещин сдвига сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Такой подход к заданию краевых условий является промежуточным между расчетами, принятыми в теории дислокаций и в механике трещин.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОВОКУПНОСТЕЙ ТРЕЩИН

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача механики [Muskhelishvili, 1966] с начальным неоднородным напряженным состоянием, определяемым внешними условиями нагружения и предыдущими этапами деформирования. Частным случаем этого начального состояния является однородное, задаваемое на бесконечном удалении значениями и ориентацией двух главных напряжений  $\sigma_1^0$  и  $\sigma_2^0$  (рис. 1). Пусть в массиве в области  $V$  имеется множество плоских областей пониженной прочности (будущих трещин)  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Пусть все векторы их нормалей лежат

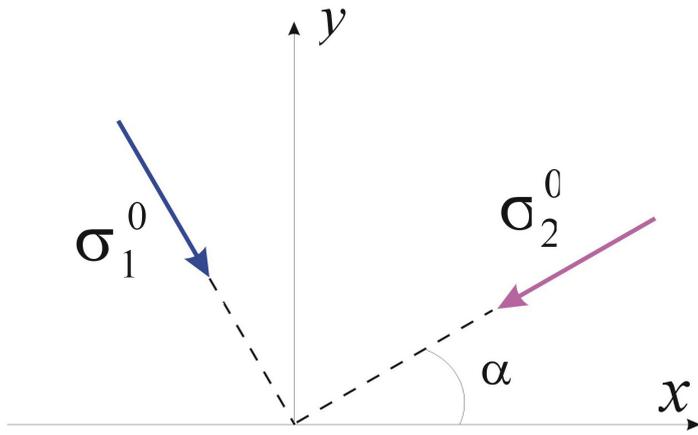


Рис. 1. Схема ориентации региональных напряжений.

Fig. 1. Regional stress orientations.

в плоскости  $xOy$ . Предполагаем, что в этой плоскости характерный размер рассматриваемых областей ограничен  $L_m$  ( $L_m \approx L$ ) одного порядка (рис. 2), а в направлении, перпендикулярном плоскости  $xOy$ , области пониженной прочности бесконечно продолжимы. Будем считать, что характерный линейный размер неоднородности исходного поля напряжений, определяемый внешними краевыми условиями нагружения, в массиве, эквивалентном рассматриваемому по форме и свойствам, но однородном и без нарушений сплошности, существенно больше линейных размеров прочностных неоднородностей и линейного размера самой исследуемой области.

В дальнейшем области пониженной прочности будем называть трещинами, полагая, что при определенных обстоятельствах их прочностные неоднородности могут реализоваться в сколовые смещения. Считаем, что вдоль плоскостей трещин в процессе деформирования происходит только взаимное скольжение их бере-

гов в плоскости  $xOy$  без возникновения отрывов (трещины скола). Предположим также, что эти трещины не пересекаются, но достаточно близко расположены друг к другу. В процессе активизации и возникновения скольжения вдоль бортов трещин они начинают испытывать взаимное влияние, вызванное изменением параметров напряженного состояния в их окрестности.

В данной постановке задача по определению поля напряжений такого трещиноватого массива может быть сведена к задаче двумерной теории упругости. Для случаев плоского напряженного или плоского деформированного состояния, когда значения напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  и величины перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  в исследуемой области  $V$  изменяются только в плоскости  $xOy$ , последние можно представить через комплексные потенциалы [Muskhelishvili, 1966] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(Z) + \overline{\Phi(\overline{Z})}] + \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0, \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\overline{Z}\Phi'(Z) + \Psi(Z)] + \sigma_{yy}^0 - \sigma_{xx}^0 + 2i\sigma_{xy}^0. \end{aligned} \quad (1)$$

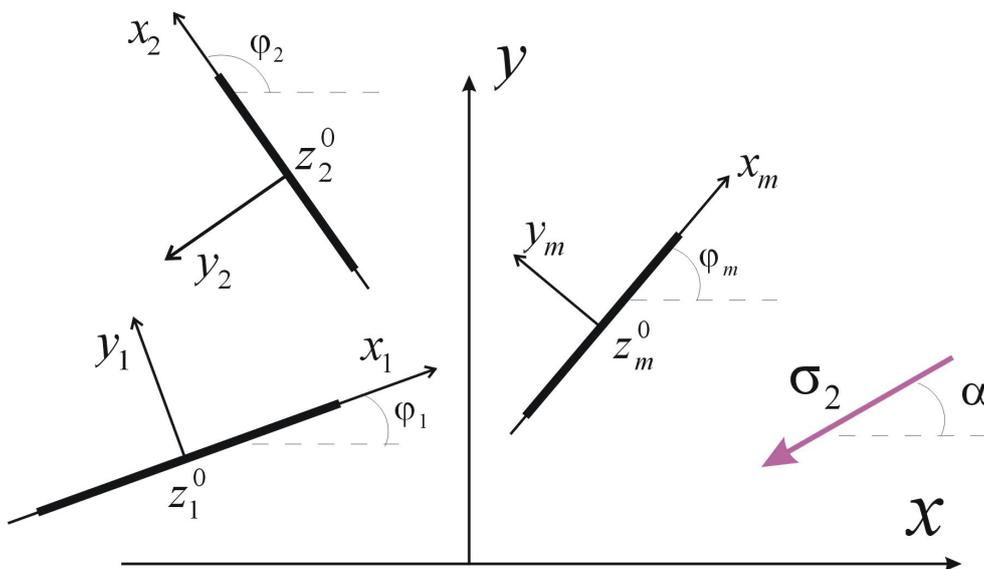


Рис. 2. Схема задачи для множества трещин скола.

Fig. 2. The problem chart for a set of shear fractures.

Здесь  $\Phi(Z)$  и  $\Psi(Z)$  – комплексные потенциалы в комплексной плоскости  $Z = X + iY$ ,  $i$  – мнимая единица,  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  и  $\sigma_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений начального напряженного состояния. Верхний индекс 0 указывает, что данные компоненты тензора напряжений отвечают начальному, невозмущенному напряженному состоянию.

Считаем, что это начальное напряженное состояние и параметры прочности вдоль каждой из трещин рассматриваемой совокупности таковы, что предопределяют одновременное достижение для них предельного состояния, после чего трещины активизируются. Одним из вариантов такого предельного условия может рассматриваться предельное соотношение

$$|\sigma_{xy}^0(x_n, y_n)| = \tau_s - k_s \sigma_{yy}^0(x_n, y_n) \text{ при } |x_n| \leq L_n, y_n = 0 \text{ и } \sigma_{yy}^0(x_n, y_n) \leq 0, \quad (2)$$

в котором взаимосвязь касательных напряжений с пределом поверхностной прочности выполняется на всей длине трещины. Здесь  $\tau_s$  и  $k_s$  – соответственно предел поверхностной прочности сцепления и коэффициент статического поверхностного трения, а  $\sigma_{yy}^0(x_n, 0)$ ,  $\sigma_{xy}^0(x_n, 0)$  – соответственно нормальные (сжимающие напряжения отрицательны) и касательные напряжения, действующие вдоль  $n$ -ой трещины длиной  $2L_n$  до ее активизации и записанные в ее локальной системе координат (рис. 2).

Результатом этих смещений является уменьшение величины касательных напряжений, действующих вдоль берегов трещины. Новое равновесное состояние определяется выполнением на каждой из трещин условия:

$$|\sigma_{xy}^1(x_n, y_n)| = -k_k \sigma_{yy}^1(x_n, y_n) \text{ при } |x_n| \leq L_n, y_n = 0 \text{ и } \sigma_{yy}^1(x_n, y_n) \leq 0, \quad (3)$$

ставящего в соответствие новому уровню касательных напряжений  $\sigma_{xy}^1(x_n, 0)$  напряжения кинематического поверхностного трения  $k_k \sigma_{yy}^1(x_n, 0)$  ( $k_k \leq k_s$ ). Верхний индекс 1 обозначает компоненты возмущенного напряженного состояния.

Величина сбрасываемых касательных напряжений  $\Delta \tau_n$  для  $n$ -ой трещины определяется как разность касательных напряжений начального  $\sigma_{xy}^0(x_n, 0)$  и конечного  $\sigma_{xy}^1(x_n, 0)$  напряженных состояний:

$$|\Delta \tau_n| = |\sigma_{xy}^0(x_n, 0) - \sigma_{xy}^1(x_n, 0)| = |\sigma_{xy}^0(x_n, 0)| + k_k \sigma_{yy}^1(x_n, 0), \text{ sign}(\Delta \tau_n) = \text{sign}(\sigma_{xy}^0). \quad (4)$$

При решении краевых задач требуется задать условия на внешних границах области  $V$  и внутренних граничных контурах, к которым относятся также сомкнутые берега трещин. Используя стандартные формулы для вычисления компонент тензора напряжений на произвольно ориентированных площадках и выражения (1), получим

$$\begin{aligned} N(\gamma(t)) - iT(\gamma(t)) &= \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_{xx}(\gamma(t)) + \sigma_{yy}(\gamma(t))) - e^{2i\theta} (\sigma_{yy}(\gamma(t)) - \sigma_{xx}(\gamma(t)) + 2i\sigma_{xy}(\gamma(t)))] = \\ &= 2 \text{Re}[\Phi(\gamma(t))] - e^{2i\theta} [\overline{\gamma(t)}\Phi'(\gamma(t)) + \Psi(t)] + [\sigma^0 - \tau^0 e^{2i(\theta-\alpha)}] \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\gamma(t)$  – замкнутый контур на комплексной плоскости,  $t$  – параметр на контуре,  $N$  и  $T$  – соответственно нормальное и касательное напряжения, действующие на участке контура  $\gamma$  со стороны положительной нормали  $n$ , составляющей с осью  $x$  угол  $\theta$  (рис. 3),  $\alpha$  – угол между осью  $x$  и осью алгебраически минимального из главных напряжений (см. рис. 1),  $\tau^0$ ,  $\sigma^0$  – максимальные касательные напряжения и среднее напряжение, которые определяются главными напряжениями, действующими в начальном напряженном состоянии:

$$\sigma^0 = (\sigma_1^0 + \sigma_2^0)/2, \quad \tau^0 = (\sigma_1^0 - \sigma_2^0)/2 \quad (6)$$

при  $\sigma_1^0 \geq \sigma_2^0$  (напряжения растяжения положительны). В данном случае правило расстановки индексов главных напряжений отличается от общепринятого тем, что не учитывается третье напряжение, действующее нормально к плоскости  $xOy$ . Таким образом,  $\sigma^0$  и  $\tau^0$ , вообще говоря, не всегда являются шаровой компонентой тензора напряжений и максимальным касательным напряжением.

Для трещины контуром является замкнутая линия, бесконечно приближенная к ее берегам. При этом в качест-

ве положительного обхода как внешних, так и внутренних контуров принимаются направления, оставляющие область  $V$  слева (рис. 3). Из (5) достаточно просто получить выражения для значений нормальных и касательных напряжений на участках произвольно ориентированного контура:

$$\begin{aligned} N(\gamma(t)) &= \sigma^0 - \tau^0 \cos 2(\theta - \alpha) + 2 \operatorname{Re}[\Phi(\gamma(t))] - \operatorname{Re}[e^{2i\theta}(\overline{\gamma(t)}\Phi'(\gamma(t)) + \Psi(t))], \\ T(\gamma(t)) &= -\tau^0 \cos 2(\theta - \alpha) - \operatorname{Im}[e^{2i\theta}(\overline{\gamma(t)}\Phi'(\gamma(t)) + \Psi(t))]. \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДИНОЧНОЙ ТРЕЩИНЫ СДВИГА

На основе предыдущих выражений и теории аналитических функций достаточно просто получить выражения для напряжений в случае существования в массиве только одной плоской трещины ( $m=1$ ) [Osokina, Friedman, 1987]. Глобальную систему координат в этом случае удобно считать совпадающей с локальной, связанной с трещиной (см. рис. 2). Будем также считать, что в результате выполнения предельного условия в новом равновесном состоянии имеется скачок смещения вдоль берегов трещины, при отсутствии скачка смещений в направлении нормали:

$$\frac{d}{dx}(u_x^+(x) - u_x^-(x)) = [u'_x(x)] = \frac{1+\kappa}{2\mu} \tilde{g}'(x), \quad (u_y^+(x) - u_y^-(x)) = [u'_y(x)] = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{g}(\pm l) = 0. \quad (8)$$

Верхними индексами (+) и (-) при перемещениях в выражениях (8) обозначены значения, к которым стремятся соответствующие функции при  $y \rightarrow +0$  и  $y \rightarrow -0$ , а квадратными скобками – скачок смещений на разрыве. Здесь  $\mu$  – модуль сдвига, а  $\kappa = 3 - 4\nu$  и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  соответственно в задаче плоского напряженного и деформированного состояния, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Заметим, что функция  $\tilde{g}'(x)$  в (8) имеет размерность напряжений. В дальнейшем для сокращения формул вместо функции  $\tilde{g}'(x)$  мы будем использовать  $g(x)$ , где  $g(x) = \frac{1+\kappa}{2\mu} \tilde{g}'(x)$ .

В случае сколовой трещины скачок смещений на разрыве представляет собой действительную функцию в отличие от трещин отрыва, рассматриваемых в работе [Savruk, 1981]. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить задачу. Используя выражения (1) и (8), поставленную задачу можно свести к задаче сопряжения кусочно-голоморфных функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [Gakhov, 1977]. Следуя работе [Savruk, 1981], выражения для потенциалов, доставляющих исчезающие на бесконечности напряжения, которые обусловлены скачком смещений на разрыве, можно представить в виде интегралов Коши:

$$\Phi(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-z} dr, \quad \Psi(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \left[ \frac{g'(r)}{r-x} + \frac{\bar{r}g'(r)}{(r-z)^2} \right] dr. \quad (9)$$

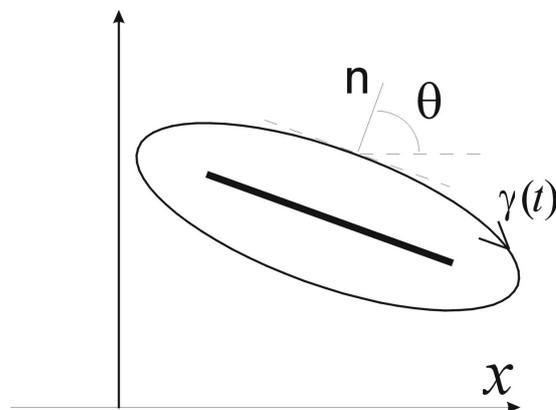


Рис. 3. Ориентация внешней нормали к граничным контурам.

Fig. 3. The orientation of the external normal to the boundary contours.

Полагая в (7)  $\theta = 90^\circ$  и используя (9), получим выражения для напряжений, действующих на берегах трещины:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \sigma^0 + \tau^0 \cos 2\alpha, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-x} dr - \tau^0 \sin 2\alpha \quad \text{при} \quad |x| \leq L, \end{aligned} \quad (10)$$

использование которых совместно с (3) позволяет получить сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши и правой частью в виде константы относительно неизвестной функции  $g(x)$ :

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-x} dr = \Delta\tau^0 \quad \text{при} \quad |x| \leq L, \quad (11)$$

где величина  $\Delta\tau^0$  представляет собой сбрасываемые на

разрыве касательные напряжения (stress drop) вследствие его активизации [Osokina, Friedman, 1987]:

$$\Delta\tau^0 = \sigma_{xy}^0 - k_k \sigma_{yy}^0 \quad \text{при} \quad \sigma_{yy}^0 = \sigma^0 + \tau^0 \cos 2\alpha; \quad \sigma_{xy}^0 = -\tau^0 \sin 2\alpha. \quad (12)$$

Здесь и всюду далее при выборе знаков в условии (3) считалось, в плоскости  $xOy$  на начальной стадии (и на бесконечности в возмущенном напряженном состоянии), действуют только сжимающие нормальные напряжения ( $\sigma_{yy} \leq 0$ ), а ориентация разрыва такова, что начальные касательные напряжения (до активизации разрыва) в системе координат  $xOy$  всегда отрицательные ( $\sigma_{xy}^0 \leq 0$ ) – левый сдвиг. Таким образом, согласно условию начала активизации скольжения (3),  $\Delta\tau^0 \leq 0$ .

Следствием выражений (10) является неизменность нормального напряжения, действующего вдоль поверхности трещины до и после активизации разрыва. Согласно (3) и (10), касательное напряжение, возникающее вдоль плоскости разрыва после смещения его берегов, также постоянно и по величине меньше своего значения до активизации разрыва.

Решение сингулярного интегрального уравнения (11) в классе функций, имеющих интегрируемую особенность при  $|x| = L$ , в работе [Osokina, Friedman, 1987] было предложено записывать в виде:

$$g(x) = \Delta\tau^0 \sqrt{L^2 - x^2}. \quad (13)$$

Такой простой вид решения связан с тем, что правая часть разрешающего уравнения (11) – величина постоянная [Gakhov, 1977]. На основании (13) и (9) выражения для упругого потенциала имеют вид:

$$\Phi(z) = \frac{i\Delta\tau^0}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - L^2}} \right), \quad \Psi(z) = -\frac{i\Delta\tau^0}{2} \left( 2 - \frac{2z}{\sqrt{z^2 - L^2}} + \frac{zL^2}{\sqrt{(z^2 - L^2)^3}} \right). \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что из (14) следует

$$\Psi(Z) = -2\Phi(Z) - Z\Phi'(Z). \quad (15)$$

Последнее выражение использовалось в работе [Kostrov, Friedman, 1975] при построении решения несколько более сложной задачи. Мы также будем его использовать.

### 2.3. ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Теперь рассмотрим совокупность близко расположенных ранее возникших сдвиговых трещин. Полагаем, что с момента их образования прошло достаточно много времени и поле напряжений в их окрестности релаксировало до квазиоднородного состояния, которое, как и для задачи одной трещины, рассматриваем в виде начального напряженного состояния. Считаем, что это начальное напряженное состояние и параметры прочности вдоль каждой из трещин рассматриваемой совокупности таковы, что предопределяют практически одновременное достижение для них предельного состояния, после чего трещины вновь активизируются.

При решении задачи для такой совокупности одновременно активизировавшихся трещин также возможно использование комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили [Muskhelishvili, 1966] в виде:

$$\Phi_n(z_n) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-L_n}^{L_n} \frac{g'_n(r)}{r - z_n} dr. \quad (16)$$

Каждой трещине  $n$  будет отвечать свой комплексный потенциал  $\Phi_n(z_n)$ , а  $z_n = x_n + iy_n$  – комплексная переменная локальной системы координат. Этот потенциал определяет вклад скачка смещений  $g_n(x_n)$  вдоль бортов данной трещины в общее напряженное состояние. В этом случае комплексный потенциал, описывающий посредством выражений (1) конечное напряженное состояние, можно представить в виде суммы комплексных потенциалов:

$$\Phi(Z) = \sum_{n=1}^M \Phi_n(Z). \quad (17)$$

Переход от локальной системы координат  $z_n$  к глобальной осуществляется по формуле  $z = z_n^0 + z_n e^{i\varphi_n}$ , где  $z_n^0$  – координата начала локальной системы координат в глобальной системе координат, а  $\varphi_n$  соответствует углу поворота координатной оси  $x_m$  до положения, параллельного координатной оси  $x$  (см. рис. 2) с положительным значением угла, отсчитываемым в направлении вращения по часовой стрелке.

Чтобы получить выражения для нормальных и касательных напряжений в плоскости разрыва с номером  $k$  в случае срабатывания (то есть активизации) разрывов с номерами  $1, \dots, k-1, k+1, \dots, M$ , подставим в (5) угол  $\theta = \varphi_k + \frac{\pi}{2}$ , соответствующий углу между осью абсцисс и нормалью к плоскости трещины:

$$N_k - iT_k = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + e^{2i\varphi_k} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) \right]. \quad (18)$$

Значения компонент напряжения в произвольной точке плоскости определим так:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^0 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Delta_m \sigma_{xx}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Delta_m \sigma_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^0 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Delta_m \sigma_{yy}, \quad (19)$$

где  $\Delta_m \sigma_{xx}$  – вклад, вносимый срабатыванием  $m$ -того разрыва в изменение компоненты  $\sigma_{xx}$  общего напряженного состояния,  $\Delta_m \sigma_{xy}$ ,  $\Delta_m \sigma_{yy}$  – вклады в изменение компонент  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  соответственно.

Подставив в (18) выражения (19), получим:

$$N_k - iT_k = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0) + e^{2i\varphi_k} (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0 + 2i\sigma_{xy}^0) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Delta_m (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \\ & + e^{2i\varphi_k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Delta_m (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}) \end{aligned} \right]. \quad (20)$$

Используя систему (1), нетрудно вывести выражения для вкладов  $m$ -того разрыва в изменение компонент тензора напряжения в произвольной точке в  $m$ -той системе координат:

$$\begin{aligned} \Delta_m (\sigma_{x_m x_m} + \sigma_{y_m y_m}) &= 2[\Phi_m(z_m) + \overline{\Phi_m(z_m)}], \\ \Delta_m (\sigma_{y_m y_m} - \sigma_{x_m x_m} + 2i\sigma_{x_m y_m}) &= 2[\bar{z}_m \Phi'_m(z_m) + \Psi_m(z_m)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись формулами перехода к другой системе координат [Muskhelishvili, 1966], выразим вклад  $m$ -того разрыва в изменение напряженного состояния в глобальной системе координат:

$$\begin{aligned} \Delta_m (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= \Delta_m (\sigma_{x_m x_m} + \sigma_{y_m y_m}), \\ \Delta_m (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) &= e^{-2i\varphi_m} \Delta_m (\sigma_{y_m y_m} - \sigma_{x_m x_m} + 2i\sigma_{x_m y_m}). \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (21) и (22), перепишем (20) в виде:

$$N_k - iT_k = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0) + e^{2i\varphi_k} (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0 + 2i\sigma_{xy}^0) + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M (\Phi_m(z_m) + \overline{\Phi_m(z_m)}) + \\ & + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M e^{2i(\varphi_k - \varphi_m)} (\bar{z}_m \Phi'_m(z_m) + \Psi_m(z_m)) \end{aligned} \right]. \quad (23)$$

Отсюда легко можно вывести явные выражения для нормального и касательного напряжений в плоскости трещины:

$$\begin{aligned}
 N_k &= N_k^0 + 4 \operatorname{Re} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \Phi_m(z_m) + 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M e^{2i(\varphi_k - \varphi_m)} (\bar{z}_m \Phi'_m(z_m) + \Psi_m(z_m)), \\
 T_k &= T_k^0 - 2 \operatorname{Im} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M e^{2i(\varphi_k - \varphi_m)} (\bar{z}_m \Phi'_m(z_m) + \Psi_m(z_m)),
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

где

$$N_k^0 = \sigma^0 + \tau^0 \cos 2\alpha_k; \quad T_k^0 = -\tau^0 \sin 2\alpha_k; \quad \alpha_k = \alpha - \varphi_k.
 \tag{25}$$

Для нахождения неизвестных скачков смещений  $g_k(x_k)$  вдоль трещин на основании условий типа (3), записанных для каждой трещины, используя (24), получим при  $k = 1, 2, \dots, M$  следующую систему сингулярных уравнений:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-L_k}^{L_k} \frac{g'_k(r)}{r - z_k} dr = T_k - k_k N_k; \quad \text{при } x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.
 \tag{26}$$

Поскольку комплексные потенциалы  $\Phi_m(z_m)$  в выражениях (16) зависят от неизвестных скачков смещений трещин, то система уравнений (26) содержит сингулярные интегралы и интегралы Фредгольма. Построить аналитическое решение этой системы не удастся, поэтому требуется применение численных методов.

В случае единичной трещины сдвига с трением на ее берегах, активизирующейся в однородном поле напряжений, нормальные напряжения до и после ее активизации остаются неизменными и постоянными:  $\sigma_{yy}^0(x_n, 0) = \sigma_{yy}^1(x_n, 0) = \text{const}$  [Osokina, Friedman, 1987]. Именно эта особенность условия на трещине позволяет для единичной трещины сдвига получить аналитическое решение в достаточно простой форме.

В случае множества одновременно активизирующихся трещин в результате собственного смещения бортов каждой трещины нормальное напряжение на ее плоскости, определяющее уровень касательных напряжений в новом равновесном состоянии, не изменяется. Однако наличие близко расположенных активных трещин приводит к изменению этих напряжений, поэтому в результате взаимодействия трещин нормальные напряжения вдоль их плоскостей уже нельзя считать теми же, что действовали на начальной стадии ( $\sigma_{yy}^1(x_n, 0) \neq \sigma_{yy}^0(x_n, 0)$  при  $|x_n| \leq L_n$ ). Важно отметить, что условие достижения нового равновесного состояния на каждой трещине (условие (2)) зависит не только от амплитуды смещений бортов данной трещины, но и от смещений на соседних трещинах. В такой постановке известны лишь частные аналитические решения, например две коллинеарные трещины (решение В.Н. Фридмана) [Sobolev, Ponomarev, 2003].

#### 2.4. ПОСТАНОВКА УПРОЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Сложность построения аналитического решения для совокупности одновременно активизирующихся трещин связана с появлением в правой части системы (26) интегралов, содержащих скачки смещений вдоль соседних трещин (24), что определяет непостоянство вдоль плоскости каждой трещины нормальных напряжений и, следовательно, касательных напряжений на стадии активизации трещин и достижения нового равновесного состояния. Само влияние неоднородности распределения напряжений вдоль плоскости трещины на результат решения предопределено выбором условий на берегах трещин в формуле (2).

Предлагается переписать формулу (2), связав процесс достижения нового равновесного состояния вдоль берегов трещины с интегральными условиями, определяющими суммы касательных напряжений и значения суммы напряжений сил трения. Это означает запись формулы (2) для средних, нормальных и касательных напряжений, действующих вдоль трещины:

$$\langle T_k \rangle_{L_k} = -k_k \langle N_k \rangle_{L_k} \quad \text{при } z_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.
 \tag{27}$$

Треугольные скобки  $\langle \rangle_{L_k}$  означают, что вместо заключенной в них величины берется ее среднее значение на длине  $k$ -того разрыва по формуле:

$$\langle f \rangle_{L_k} = \frac{1}{z(L_k) - z(-L_k)} \int_{z(-L_k)}^{z(L_k)} f(z) dz, \quad (28)$$

где  $f$  – произвольная функция комплексного переменного, принимающая действительные или комплексные значения,  $z(-L_k)$  и  $z(L_k)$  – координаты концов  $k$ -того разрыва в той системе координат, в которой мы вычисляем интеграл.

Использование в качестве условий на разрывах соотношения (27) позволяет свести влияние соседних трещин на состояние анализируемой трещины под номером  $k$  к учету постоянного вдоль плоскости трещины «эффективного» напряженного состояния (мезоуровня). Это состояние обусловлено как действием региональных напряжений, так и добавочными напряжениями, связанными с существованием соседних активных трещин, т.е. его можно считать аналогом напряженного состояния мезоуровня [Panin, 1998]. Подобное упрощение условия (2), определяющего закон распределения напряжений трения на трещине в новом состоянии, соответствует уровню точечной аппроксимации динамических параметров очага землетрясения, используемой в сейсмологии. Здесь также определяют средние для размеров очага его геометрические (положение нодальных плоскостей) и динамические (сейсмическая энергия, сброшенные напряжения) параметры.

Использование условия на трещине в виде (27) позволяет правую часть разрешающего интегрального уравнения, записанного относительно неизвестной функции скачка смещения каждой трещины (уравнение подобное (11)), представить в виде константы. Таким образом, в такой постановке неоднородность пространственного распределения начального поля напряжений, а также влияние соседних активных трещин могут быть сведены к усредненным значениям нормальных и касательных напряжений. В силу записи краевых условий на разрыве в интегральной форме (27) появляется определенный произвол в характере скачка перемещений на разрыве. В отличие от сейсмологии в нашем подходе скачок смещений на трещине не сводится к постоянному значению, так, как это, например, было сделано в работах [Chinnery, 1961, 1963]. Мы будем искать функцию скачка в виде, аналогичном (13), т.е. полагать

$$g_n(x_n) = \Delta \bar{\tau}_n \sqrt{L_n^2 - x_n^2} \text{ при } |x_n| \leq L_n, \quad n = 1, \dots, M. \quad (29)$$

Несложно видеть, что при таком представлении функции скачка смещения величина  $\Delta \bar{\tau}_m$  представляет собой усредненный вдоль поверхности трещины порядкового номера  $m$  скачок касательных напряжений ( $\Delta \bar{\tau}_m = \langle \Delta \tau_m \rangle_{L_m}$ ), имеющий место в процессе активизации этой трещины (см., например, выражение (11)). Значение сброшенных касательных напряжений на трещине номер  $m$  зависит не только от параметров исходного поля напряжений (на бесконечности), но и от возмущений, вносимых соседними разрывами, активизировавшимися либо раньше, либо одновременно с трещиной номер  $m$ .

На основе (16) и (29) выражения для вклада в упругий потенциал сколовой трещины  $m$  в ее локальной системе координат перепишем в виде

$$\Phi_n(z_n) = \frac{i\Delta \bar{\tau}_n}{2} \left( 1 - \frac{z_n}{\sqrt{z_n^2 - L_n^2}} \right), \quad n = 1, \dots, M, \quad \Psi_n(z_n) = -\frac{i\Delta \bar{\tau}_n}{2} \left( 2 - \frac{2z_n}{\sqrt{z_n^2 - L_n^2}} + \frac{z_n L_n^2}{\sqrt{(z_n^2 - L_n^2)^3}} \right). \quad (30)$$

При таком виде потенциалов, аналогично (15), в локальной системе координат, связанной с  $n$ -тым разрывом, выполняется следующее соотношение:

$$\Psi_n(z_n) = -2\Phi_n(z_n) - Z_n \Phi'_n(z_n). \quad (31)$$

С учетом (31) выражения (24) можем переписать следующим образом:

$$N_n = N_n^0 + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ (1 - e^{2i(\phi_m - \phi_n)}) \Phi_m(z_m) \right] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} (\bar{z}_m - z_m) \frac{d\Phi_m(z_m)}{dz_m} \right],$$

$$T_n = T_n^0 - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} \Phi_m(z_m) \right] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} (\bar{z}_m - z_m) \frac{d\Phi_m(z_m)}{dz_m} \right]. \quad (32)$$

Отсюда средние значения напряжений на  $n$ -том разрыве определяются так:

$$\begin{aligned} \langle N_n \rangle_{L_n} &= N_n^0 + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ \left( 1 - e^{2i(\phi_m - \phi_n)} \right) \langle \Phi_m \rangle_{L_n} \right] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} \left\langle (\bar{z}_m - z_m) \frac{d\Phi_m(z_m)}{dz_m} \right\rangle_{L_n} \right], \\ \langle T_n \rangle_{L_n} &= T_n^0 - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} \langle \Phi_m \rangle_{L_n} \right] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ e^{2i(\phi_m - \phi_n)} \left\langle (\bar{z}_m - z_m) \frac{d\Phi_m(z_m)}{dz_m} \right\rangle_{L_n} \right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Произведя, согласно формуле (28), интегрирование в последних выражениях, получим

$$\begin{aligned} \langle N_n \rangle_{L_n} &= N_n^0 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ \Delta \tau_m \left( 1 - e^{2i\phi_{nm}} \left( 1 - \frac{1}{2L_n} A_{nm} \right) \right) \right] - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Im} \left[ \frac{\Delta \tau_m}{4L_n} (B_{nm} + A_{nm}) \right], \\ \langle T_n \rangle_{L_n} &= T_n^0 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ \Delta \tau_m e^{2i\phi_{nm}} \left( 1 - \frac{1}{2L_n} A_{nm} \right) \right] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M \operatorname{Re} \left[ \frac{\Delta \tau_m}{4L_n} (B_{nm} + A_{nm}) \right] \end{aligned} \tag{34}$$

при

$$\begin{aligned} A_{nm} &= e^{-i\phi_{nm}} [F_m(L_n) - F_m(-L_n)], \\ B_{nm} &= e^{i\phi_{nm}} \left( \frac{L_m^2 - \bar{z}_m(L_n)z_m(L_n)}{F_m(L_n)} - \frac{L_m^2 - \bar{z}_m(-L_n)z_m(-L_n)}{F_m(-L_n)} \right), \\ F_m(\pm L_n) &= \sqrt{z_m^2(\pm L_n) - L_m^2}, \quad z_m(\pm L_n) = (-z_{mn}^0 \pm L_n e^{i\phi_n}) e^{-i\phi_m}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем подставить выражения (34) в уравнения (27) и получить систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных значений средних сброшенных напряжений  $\Delta \bar{\tau}_m$  на каждой трещине из исследуемой совокупности:

$$\Delta \bar{\tau}_n = \Delta \tau_n^0 + \frac{1}{2L_n} \sum_{\substack{m=1, \dots, M \\ m \neq n}} \Delta \bar{\tau}_m \left\{ \operatorname{Re} \left[ e^{2i\phi_{nm}} (2L_n - A_{nm}) - (B_{nm} + A_{nm}) / 2 \right] - k_k \operatorname{Im} \left[ (1 - e^{2i\phi_{nm}}) (2L_n - A_{nm}) + (B_{nm} + A_{nm}) / 2 \right] \right\}. \tag{35}$$

В случае последовательной активизации трещин система имеет более простой вид, поскольку значение средних сброшенных напряжений на каждой трещине определяется через уже известные значения сброшенных напряжений на предыдущих сработавших трещинах:

$$\Delta \bar{\tau}_n = \Delta \tau_n^0 + \frac{1}{2L_n} \sum_{m=1}^{n-1} \Delta \bar{\tau}_m \left\{ \operatorname{Re} \left[ e^{2i\phi_{nm}} (2L_n - A_{nm}) - (B_{nm} + A_{nm}) / 2 \right] - k_k \operatorname{Im} \left[ (1 - e^{2i\phi_{nm}}) (2L_n - A_{nm}) + (B_{nm} + A_{nm}) / 2 \right] \right\}. \tag{36}$$

Таким образом, зная из (35) или (36) значения  $\Delta \bar{\tau}_m$ , определим, согласно (30), потенциалы  $\Phi_m(z_m)$  и из выражений (1) найдем, используя (31), формулы для определения компонент тензора напряжений в любой точке плоскости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 + \sum_{m=1}^M \left[ 2 \operatorname{Re} \Phi_m(z_m) - \operatorname{Re} e^{-2i\phi_m} (-2\Phi_m(z_m) + (\bar{z}_m - z_m)\Phi'_m(z_m)) \right], \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^0 + \sum_{m=1}^M \left[ 2 \operatorname{Re} \Phi_m(z_m) + \operatorname{Re} e^{-2i\phi_m} (-2\Phi_m(z_m) + (\bar{z}_m - z_m)\Phi'_m(z_m)) \right], \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^0 + \sum_{m=1}^M \operatorname{Im} e^{-2i\phi_m} [-2\Phi_m(z_m) + (\bar{z}_m - z_m)\Phi'_m(z_m)]. \end{aligned} \tag{37}$$

### 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ СОВОКУПНОСТЕЙ ТРЕЩИН

Здесь будут показаны результаты расчета по предлагаемому подходу применительно к нескольким тестовым задачам о взаимодействии двух и более трещин. Во всех задачах начальное напряженное состояние однородное и ему отвечают значения главных напряжений  $\sigma_1^0 = 0$ ,  $\sigma_2^0 = -2$ . Угол наклона осей этих главных напряжений по отношению к системе координат, связанной с трещинами, далее будет указываться. Поскольку исследуемая двумерная область не ограничена, в конечном поле напряжений, возникающем после активизации трещин, параметры напряженного состояния, отвечающего начальному, будут действовать на достаточном удалении от зоны расположения трещин (на бесконечности).

В первой группе задач рассматривается взаимодействие двух трещин разного размера, при этом первой активизируется трещина большей длины (соотношение размеров трещин 1 к 1/4), одна из которых под действием начальных напряжений активизировалась первой. На поверхностях трещины в момент смещения ее бортов задаются условия с нулевым коэффициентом трения на стадии скольжения (условия (3)). Считается, что после смещения берегов этой трещины прочность сцепления ее бортов возрастает (условия (2)), что обеспечивает отсутствие смещения ее бортов после активизации второй трещины (борта первой трещины «склеиваются» после смещений, трещина «залеживается»). Вдоль берегов этой второй трещины на стадии скольжения также задается нулевой коэффициент трения (3). Исследуется зависимость характера поля напряжений, возмущенного после активизации второй трещины, от положения и ориентации второй трещины относительно первой.

Вторая группа задач посвящена изучению напряженного состояния в случае одновременной активизации двух трещин разной длины, расположенных под различными углами друг к другу.

В третьей группе задач также рассматривается взаимодействие только двух трещин разного размера (соотношение размеров трещин 1 к 2), но при этом исследуются изменения напряженного состояния, обусловленные разной последовательностью активизации. В первом случае первой активизируется короткая трещина, а затем длинная, во втором случае – наоборот. Третий вариант расчета в этой группе отвечает одновременной активизации обеих трещин. При расчетах с последовательной активизацией трещин, так же как и в двух первых группах задач, считается, что активизация трещины происходит в условиях нулевого трения и после активизации первой ее берега «склеиваются».

В четвертой группе задач рассматривается взаимодействие системы из 29 трещин, расположенных эшелонно, подобно тому, как возникают трещины Риделя в зоне горизонтального сдвигания [Rebetsky, Mikhailo-

va, 2011]. Предполагается, что трещины активизируются одновременно с нулевым коэффициентом трения на бортах (3).

Поскольку мы достаточно часто в последующем анализе будем обращаться к напряженному состоянию одиночной трещины, на рис. 4 показаны поля нормальных  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , касательных  $\sigma_{xy}$  напряжений, максимального касательного напряжения  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  (где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – значения главных напряжений возмущенного состояния), среднего двумерного давления  $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  и кулоновского напряжения:

$$\tau_c = \tau_{\max} - kp, \quad (38)$$

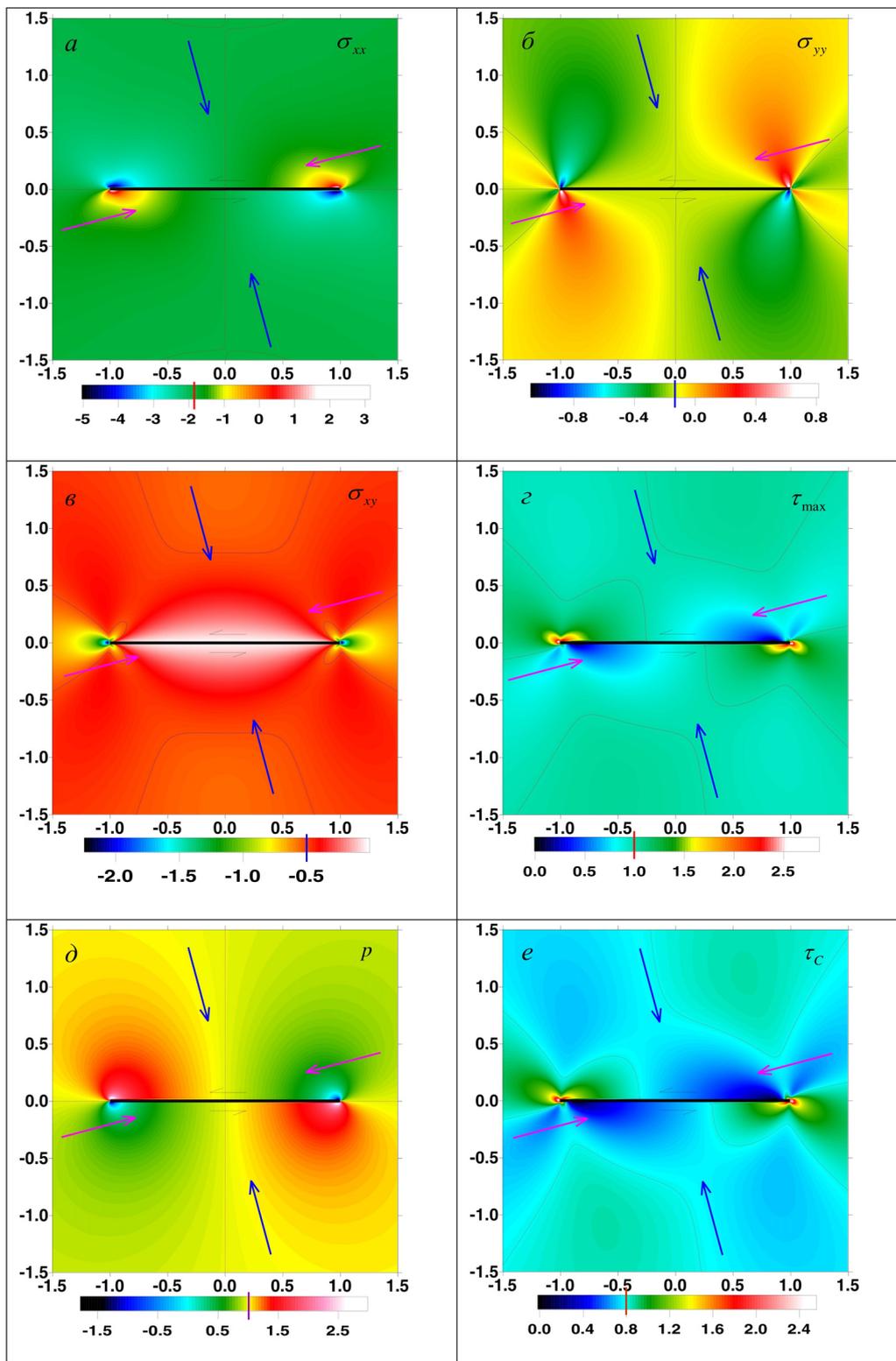
рассчитанного при коэффициенте внутреннего трения  $k = 0.2$ . Угол между направлением максимального сжатия  $\sigma_2^0$ , действующего в возмущенном состоянии на бесконечности, и осью абсцисс  $\alpha = 15^\circ$ .

На всех рисунках изолинии красного или синего цвета (зависит от преимущественного цвета самого рисунка) показывают точки пространства, в которых значение данного параметра для начальной стадии напряженного состояния и в возмущенной стадии остались неизменными. На цветовой шкале это значение показывается линией соответствующего цвета (красного или синего).

#### 3.1. ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ ТРЕЩИНЫ РАЗНЫХ РАЗМЕРОВ

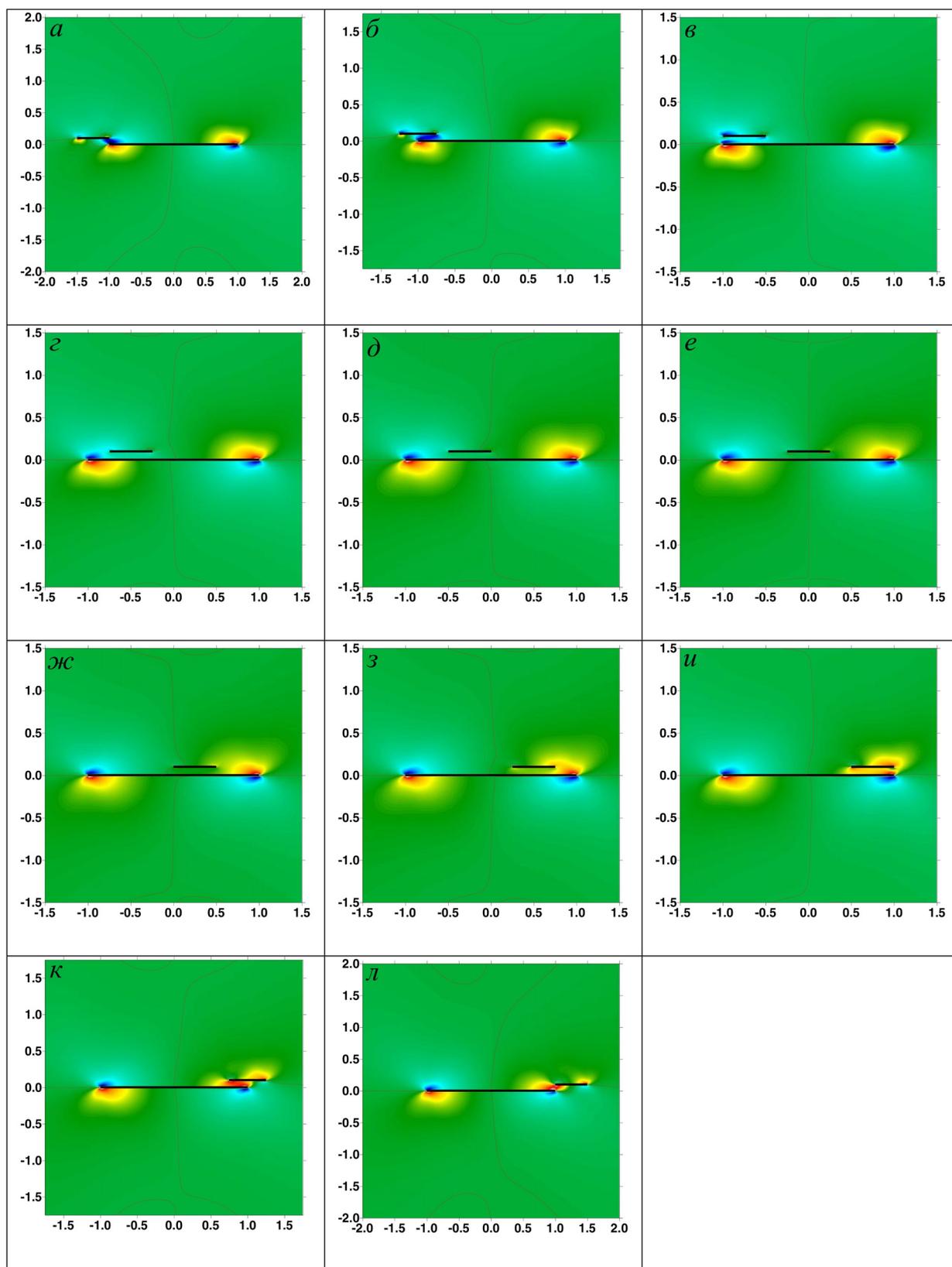
В качестве примера рассмотрим случай последовательной активизации двух параллельных трещин. Анализируются напряженные состояния, возникающие после активизации второй (короткой) трещины, которая всегда расположена параллельно первой, но в разных случаях имеет разное горизонтальное смещение относительно центра первой трещины. Размеры первой и второй трещин соотносятся как 1 к 1/4. Показаны поля нормальных  $\sigma_{xx}$  (рис. 5),  $\sigma_{yy}$  (рис. 6), касательных  $\sigma_{xy}$  (рис. 7) напряжений, максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$  (рис. 8) и среднего давления  $p$  (рис. 9). В табл. 1 показаны величины сброшенных напряжений на второй трещине. Напряжения, сброшенные на первой трещине, всегда отвечают начальному напряженному состоянию и поэтому одинаковы для всех случаев.

Остановимся подробнее на рисунках. При крайнем левом положении второй трещины (правый конец строго над левым концом первой трещины, рис. 5–9, а) сброшенные на ней касательные напряжения самые большие по модулю, поэтому возмущения, вносимые этой трещиной в поле напряжений, наиболее сильные. Это связано с тем, что вторая трещина оказывается в зоне повышенных касательных напряжений, возникшей после активизации первой трещины (см.



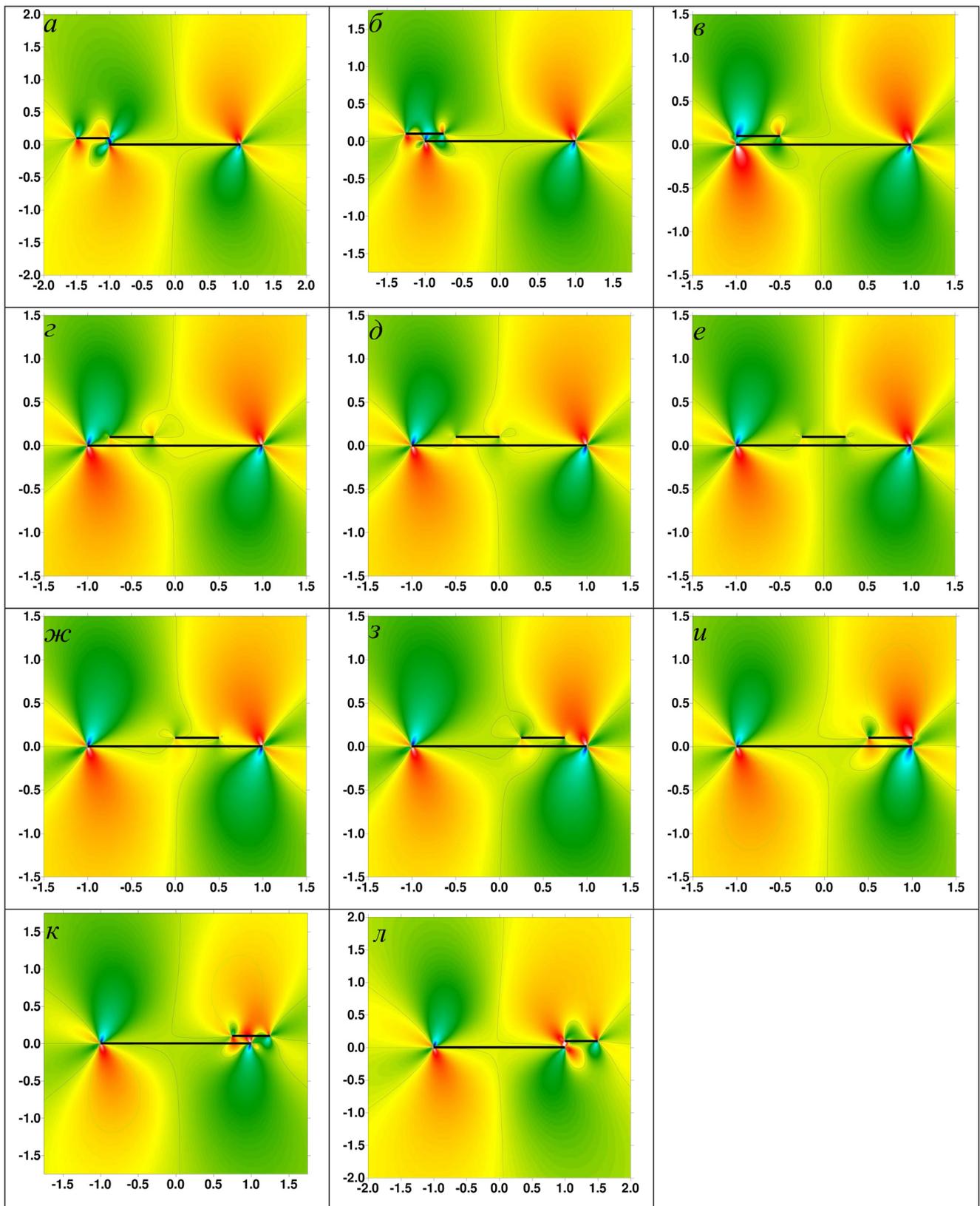
**Рис. 4.** Параметры напряженного состояния для единичной трещины. Вертикальной цветной чертой (синей или красной) на каждой шкале и изолинией такого же цвета на каждом рисунке показано начальное (до активизации трещины) значение соответствующего параметра. Ось максимального сжатия напряжений на бесконечности показана цветом магнетик, а ось минимального сжатия – синим цветом. Здесь и далее координаты приводятся в безразмерном виде, нормировка производится на половинную длину наибольшей трещины (в данном случае одна трещина). На рисунках линиями красного или синего цвета дается значение компоненты напряжений в исходном однородном напряженном состоянии.

**Fig. 4.** Stress parameters of a single fracture. Vertical blue (or red) lines in each scale and isolines of the same colour in each figure show the initial value of the corresponding parameter (i.e. before activation of the fracture). The maximum compression stress axis at infinity is shown in magenta. The minimum compression stress axis is shown in blue. Coordinates are dimensionless hereinafter. Normalization is for half-length of the largest fracture (in this case, one fracture). Red (or blue) lines show values of stress components in the initial uniform state of stresses.



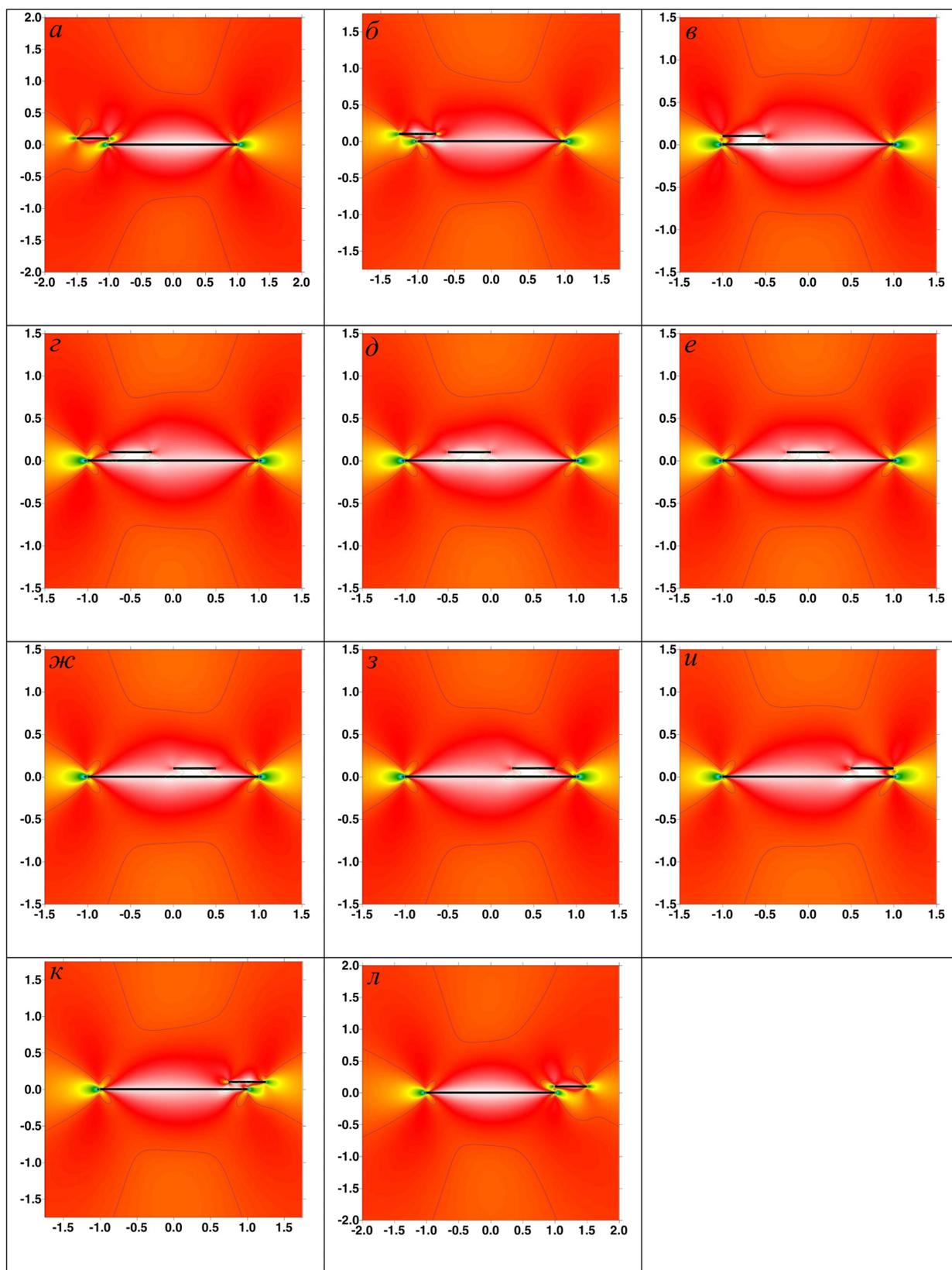
**Рис. 5.** Распределение значений напряжений  $\sigma_{xx}$  для двух параллельных трещин при изменении положения короткой трещины (тонкая черная линия) относительно большой. Большая трещина активизируется первой, и положение ее концов фиксируют области высокого цветового градиента для  $y=0$ . Цветовая шкала на рис. 4, а.

**Fig. 5.** Distribution of stress values  $\sigma_{xx}$  for two parallel fractures in case of changing position of the short fracture (thin black line) relative to the large fracture. The large fracture is activated first, and its terminations are marked by areas with the high colour gradient for  $y=0$ . The colour scale is given in Fig. 4, a.



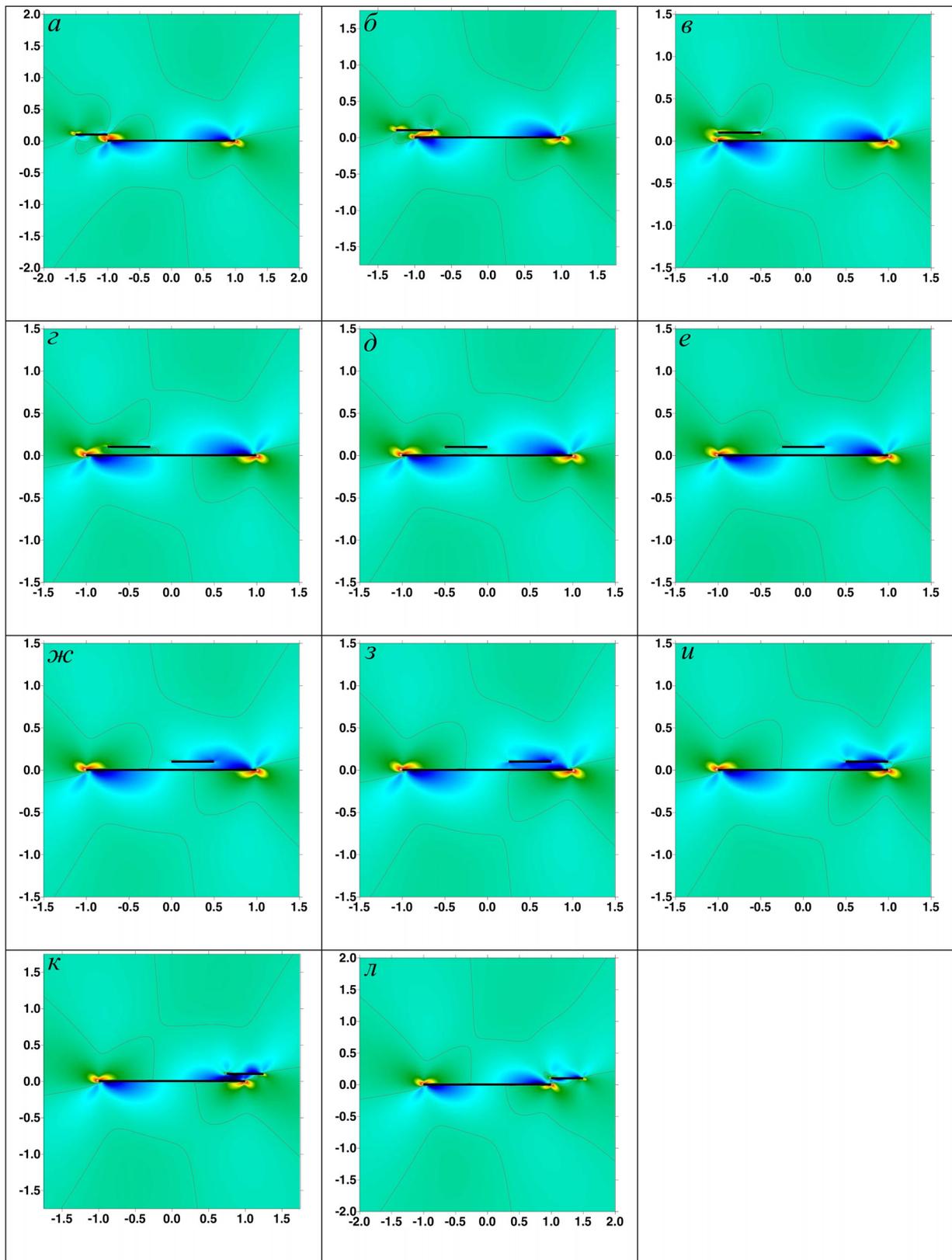
**Рис. 6.** Распределение значений напряжений  $\sigma_{yy}$  для двух параллельных трещин при изменении положения короткой трещины (тонкая черная линия) относительно большой. Большая трещина активизируется первой, и положение ее концов фиксируют области высокого цветового градиента для  $y=0$ . Цветовая шкала на рис. 4, б.

**Fig. 6.** Distribution of stress values  $\sigma_{yy}$  for two parallel fractures in case of changing position of the short fracture (thin black line) relative to the large fracture. The large fracture is activated first, and its terminations are marked by areas with the high colour gradient for  $y=0$ . The colour scale is given in Fig. 4, б.



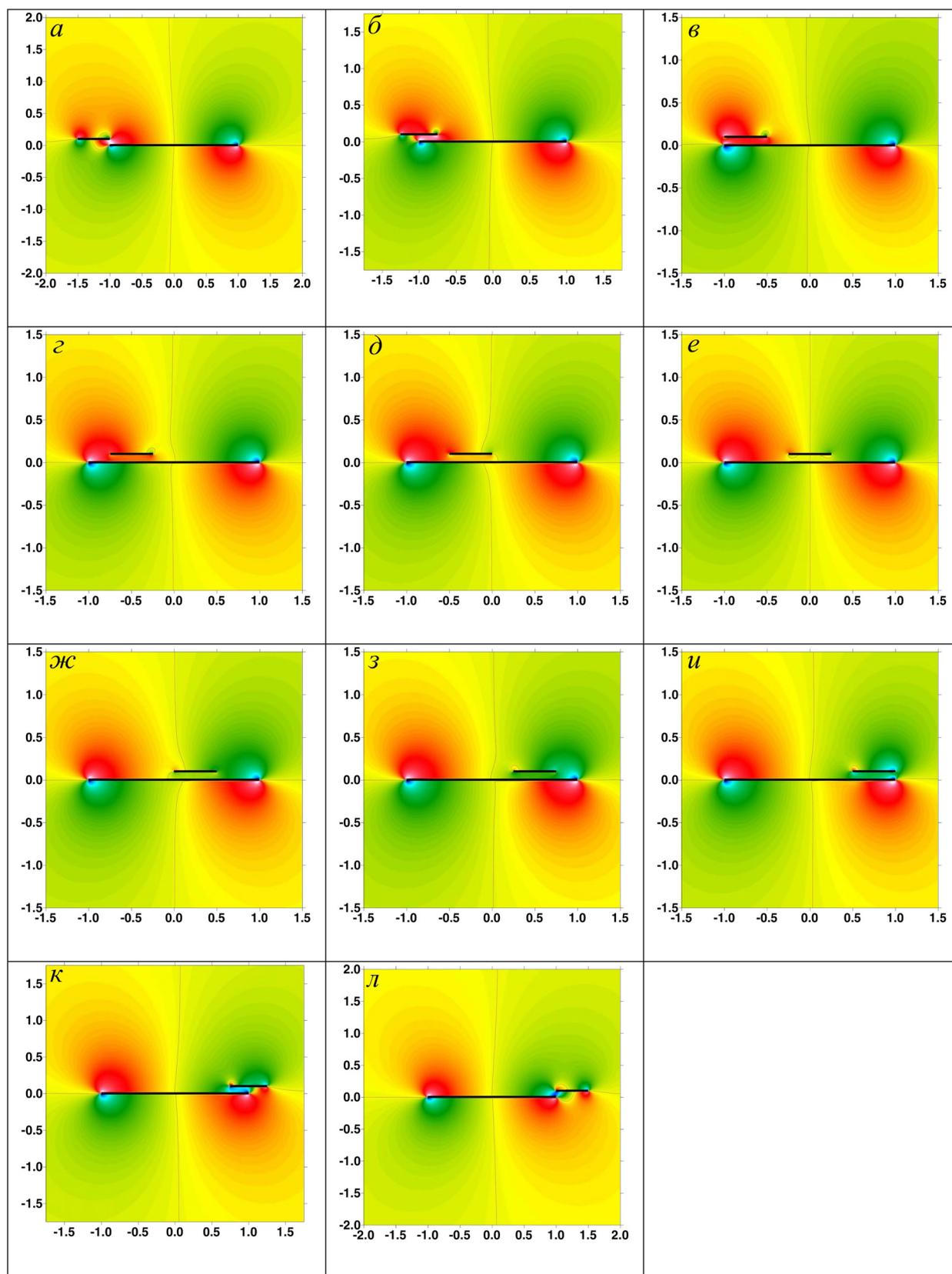
**Рис. 7.** Распределение значений напряжений  $\sigma_{xy}$  для двух параллельных трещин при изменении положения короткой трещины (тонкая черная линия) относительно большой. Большая трещина активизируется первой, и положение ее концов фиксируют области высокого цветового градиента для  $y=0$ . Цветовая шкала на рис. 4, в.

**Fig. 7.** Distribution of stress values  $\sigma_{xy}$  for two parallel fractures in case of changing position of the short fracture (thin black line) relative to the large fracture. The large fracture is activated first, and its terminations are marked by areas with the high colour gradient for  $y=0$ . The colour scale is given in Fig. 4, в.



**Рис. 8.** Распределение значений  $\tau_{\max}$  для двух параллельных трещин при изменении положения короткой трещины (тонкая черная линия) относительно большой. Большая трещина активизируется первой, и положение ее концов фиксируют области высокого цветового градиента для  $y=0$ . Цветовая шкала на рис. 4, з.

**Fig. 8.** Distribution of  $\tau_{\max}$  values for two parallel fractures in case of changing position of the short fracture (thin black line) relative to the large fracture. The large fracture is activated first, and its terminations are marked by areas with the high colour gradient for  $y=0$ . The colour scale is given in Fig. 4, z.



**Рис. 9.** Распределение значений среднего давления  $p$  для двух параллельных трещин при изменении положения короткой трещины (тонкая черная линия) относительно большой. Большая трещина активизируется первой, и положение ее концов фиксируют области высокого цветового градиента для  $y=0$ . Цветовая шкала на рис. 4, д.

**Fig. 9.** Distribution of average pressure values  $p$  for the two parallel fractures in case of changing position of the short fracture (thin black line) relative to the large fracture. The large fracture is activated first, and its terminations are marked by areas with the high colour gradient for  $y=0$ . The colour scale is given in Fig. 4, д.

Таблица 1. Значения сброшенных касательных напряжений на короткой трещине для случая двух параллельных трещин

Table 1. Values of dropped shear stresses on the short fracture for the case of two parallel fractures

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л
-0.67	-0.57	-0.34	-0.16	-0.11	-0.10	-0.11	-0.16	-0.34	-0.57	-0.67

$\sigma_{xy}$  для одиночной трещины, рис. 4). Такое расположение трещин приводит к тому, что области пониженных напряжений  $\sigma_{xx}$  (см. рис. 5, а) выше левого конца первой трещины и ниже правого конца второй сливаются и, перекрывая друг друга, уменьшают области повышенных напряжений ниже левого конца первой трещины и выше правого конца второй. Если вторая трещина смещена чуть ближе к центру первой (см. рис. 5, б), этот эффект сохраняется, хотя сброшенные напряжения на второй трещине оказываются чуть меньше.

На представляемых рисунках сами трещины отмечены тонкими черными линиями. Иногда они перекрываются изолиниями значений начального напряженного состояния. В любом случае положение концов трещин хорошо фиксируется областями высокого градиента напряжений, выраженных в быстрой смене цвета.

Из рис. 6, а, видно, что вторая трещина в своей окрестности вызывает изменения положения зон повышенных и пониженных значений нормального напряжения  $\sigma_{yy}$  по сравнению со случаем одиночной трещины, эти зоны локально меняются местами. В следующем случае, когда вторая трещина расположена чуть правее (рис. 6, б), ниже первой трещины тоже будет небольшая область пониженных напряжений, отсутствовавшая до активизации второй трещины.

Рассмотрим касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  в первых двух случаях (см. рис. 7, а, б). На рис. 7, а, активизация второй трещины вызывает некоторые локальные изменения поля напряжений, при этом на плоскости первой трещины возникают незначительные отрицательные касательные напряжения. А на рис. 7, б, на первой трещине появляются и положительные напряжения вблизи левого конца, более того, среднее значение касательного напряжения в плоскости первой трещины положительно. Что касается максимальных касательных напряжений, то в случаях рис. 8, а, и рис. 8, б, отмечается слияние областей повышенного напряжения вблизи левого конца первой трещины и вблизи правого конца второй. То же можно сказать и о среднем давлении, причем в случае рис. 9, б, к объединению двух указанных зон присоединяется еще одна, возникшая около левого конца второй трещины. Если еще немного сместить вторую трещину вправо (рис. 5–9, в), она окажется уже полностью в зоне пониженных касательных напряжений, возникшей при активизации первой трещины. Сброшенные напряжения на второй трещине еще уменьшатся по сравнению со

случаем рис. 5–9, б. Вокруг нее наблюдаются небольшие возмущения исследуемых параметров. При приближении второй трещины к центру первой степень влияния второй трещины на общую картину практически сходит на нет (рис. 5–9, г–з). На первой трещине после срабатывания второй появляются положительные касательные напряжения вблизи второй трещины. Когда вторая трещина приближается к правому концу первой (рис. 5–9, и, к, л), при рассмотрении касательных напряжений (рис. 7, и, к, л) мы наблюдаем картину, полностью симметричную той, что получается при приближении второй трещины к левому концу первой (рис. 7, в, б, а соответственно). Этого и следовало ожидать, ведь мы рассматриваем случай, когда коэффициент трения  $k_k$  равен нулю (см. уравнения (36)), следовательно, нормальные напряжения не влияют на сбрасываемые касательные напряжения (табл. 1). Обратим также внимание на то, что после активизации второй трещины на плоскости первой появляются касательные напряжения, знак которых зависит от положения второй трещины. Обозревая остальные параметры (рис. 5, 6, 8, 9, и, к, л), можно говорить о симметрии случаям рис. 5, 6, 8, 9, а, б, в, «с точностью до наоборот». Объединяются зоны повышенных напряжений  $\sigma_{xx}$  вблизи второй и вблизи правого конца первой трещины. Точно так же сливаются зоны пониженных максимальных касательных напряжений и зоны пониженного всестороннего давления.

На самом деле для случаев рис. 5–9, и, к, приведенное решение не вполне корректно, поскольку после активизации первой трещины на плоскости возникают зоны положительных напряжений  $\sigma_{yy}$  и значительная часть второй трещины в них попадает (на рис. 6, и, к, зеленая изолиния показывает нулевой уровень нормального напряжения после активизации первой трещины, см. также рис. 4, б). Значит, на ней возможны отрывные смещения, поэтому здесь описанный метод неприменим. Такая ситуация возникла из-за того, что мы взяли начальное главное напряжение  $\sigma_1^0 = 0$ . В случае же действительно всестороннего сжатия (скажем, на больших глубинах) значительных отрывных напряжений не возникнет. Тем не менее мы решили привести здесь рисунки для этих случаев, так как они дают правильное представление по крайней мере о сдвиговой компоненте смещения.

### 3.2. ДВЕ ТРЕЩИНЫ ПОД РАЗНЫМИ УГЛАМИ ДРУГ К ДРУГУ

Посмотрим, как будет выглядеть картина напряжений в том случае, если две трещины расположены не

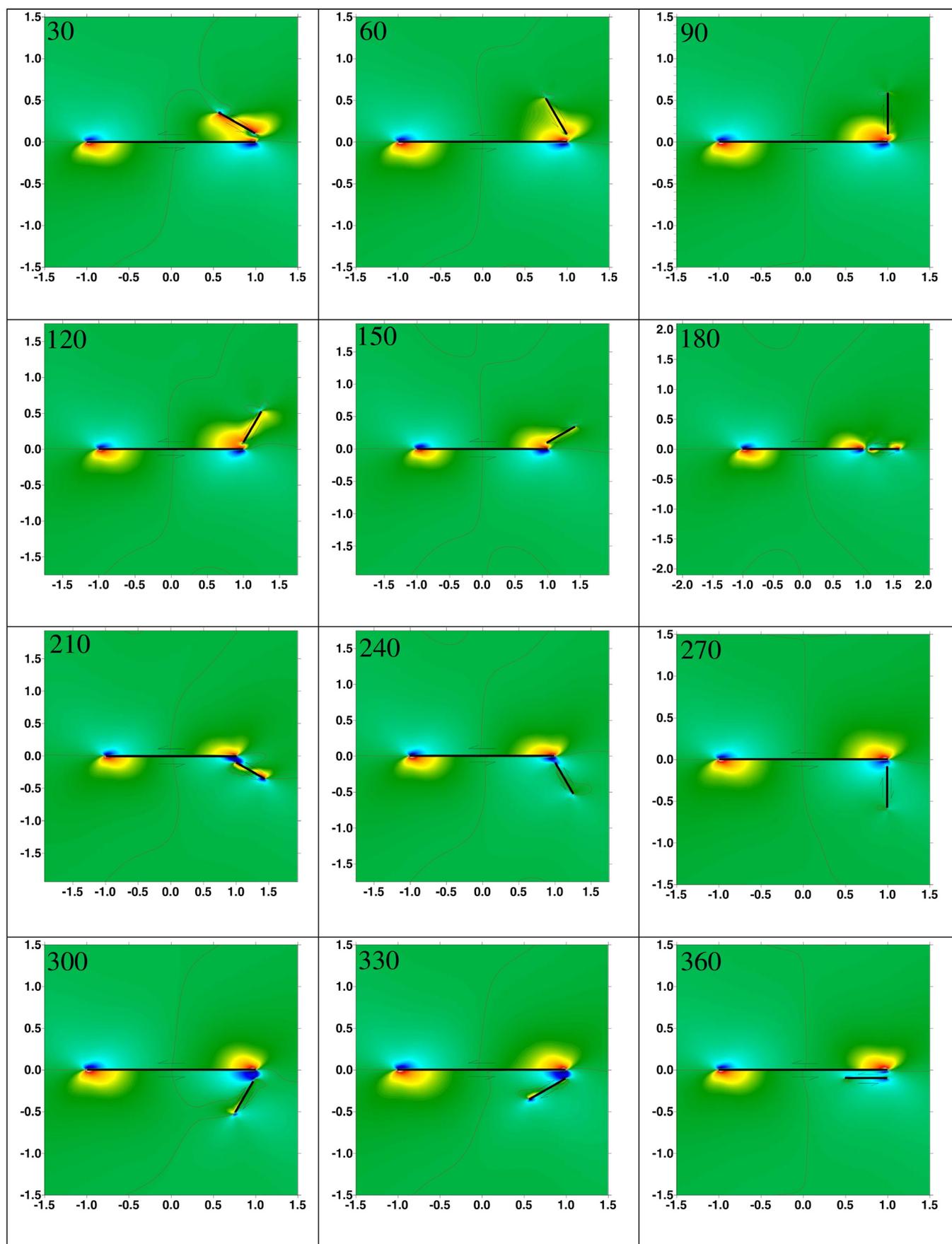


Рис. 10. Распределение значений  $\sigma_{xx}$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

Fig. 10. Distribution of  $\sigma_{xx}$  values in case of simultaneous activation of two fractures at various angles to each other.

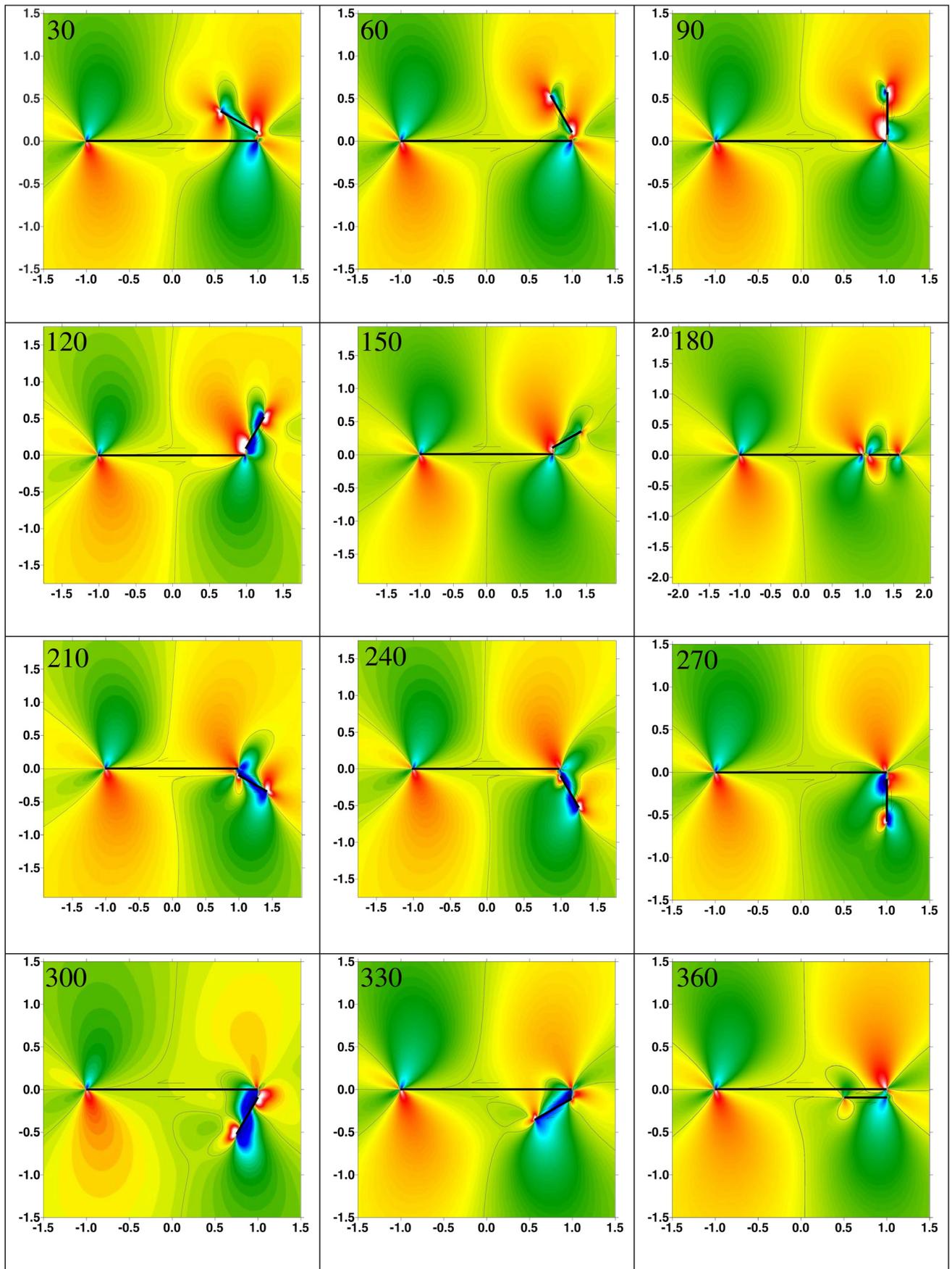


Рис. 11. Распределение значений  $\sigma_{yy}$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

Fig. 11. Distribution of  $\sigma_{yy}$  values in case of simultaneous activation of two fractures at various angles to each other.

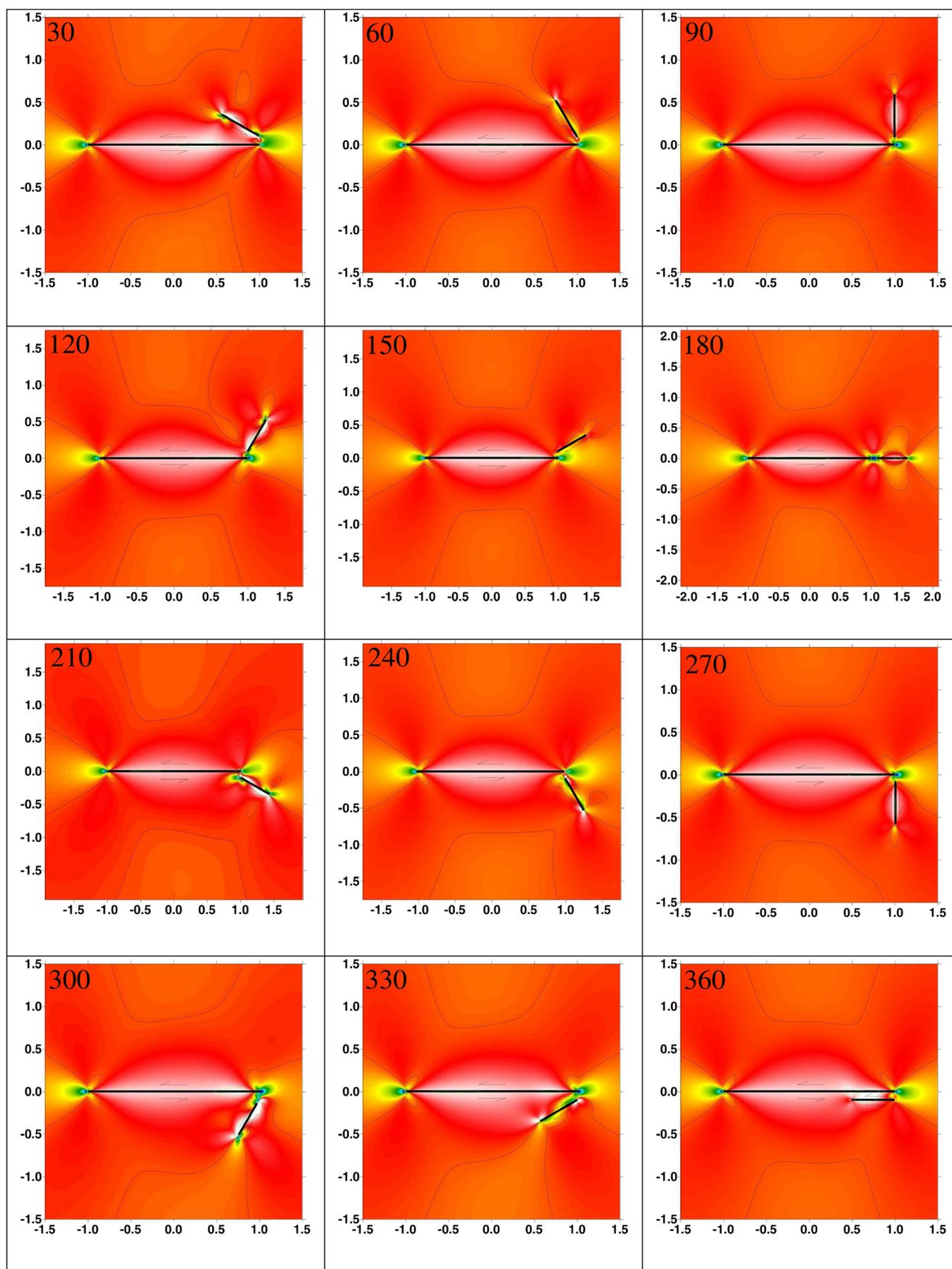
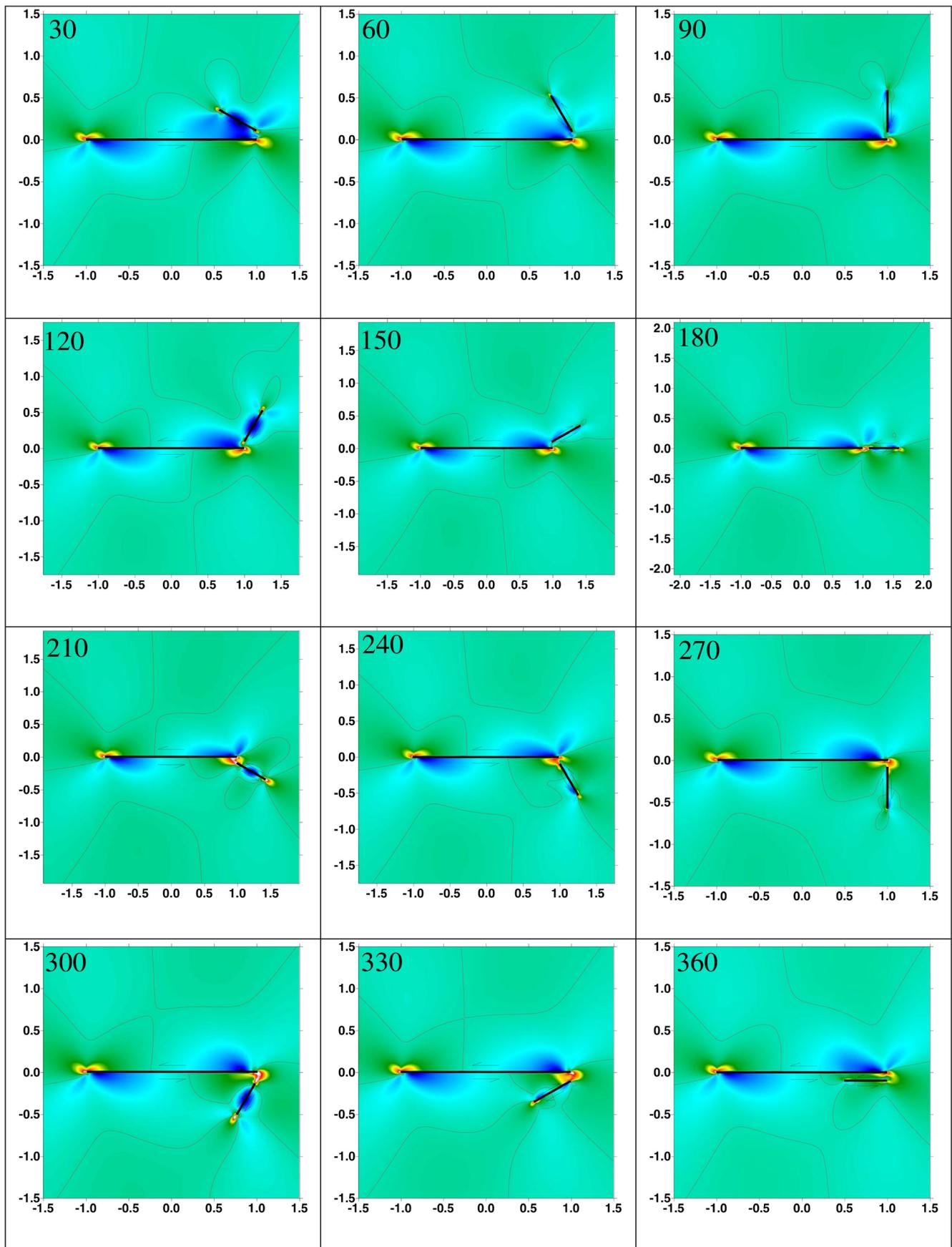


Рис. 12. Распределение значений  $\sigma_{xy}$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

Fig. 12. Distribution of  $\sigma_{xy}$  values in case of simultaneous activation of two fractures at various angles to each other.



**Рис. 13.** Распределение значений  $\tau_{\max}$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

**Fig. 13.** Distribution of  $\tau_{\max}$  values in case of simultaneous activation of two fractures located at various angles to each other.

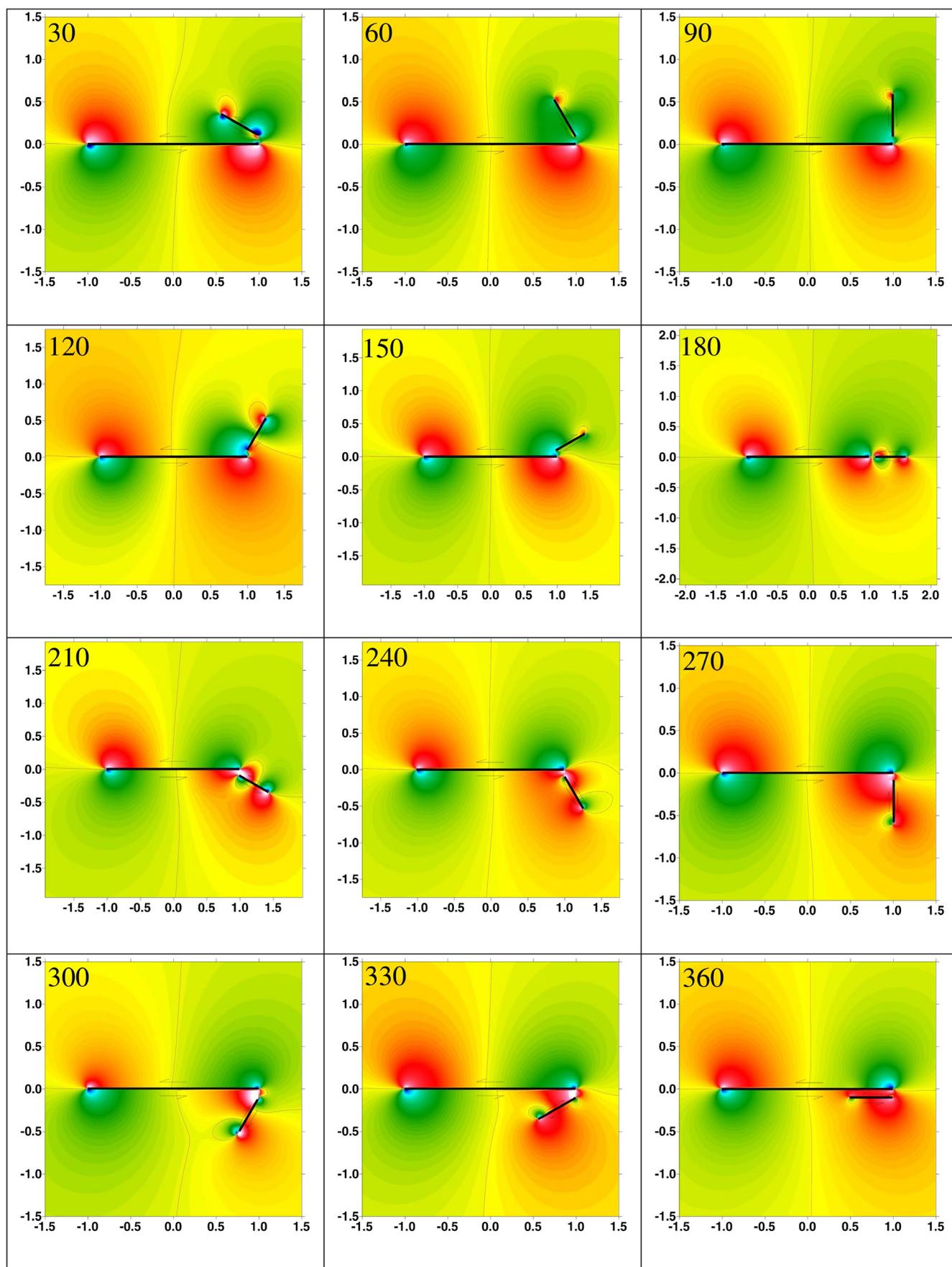
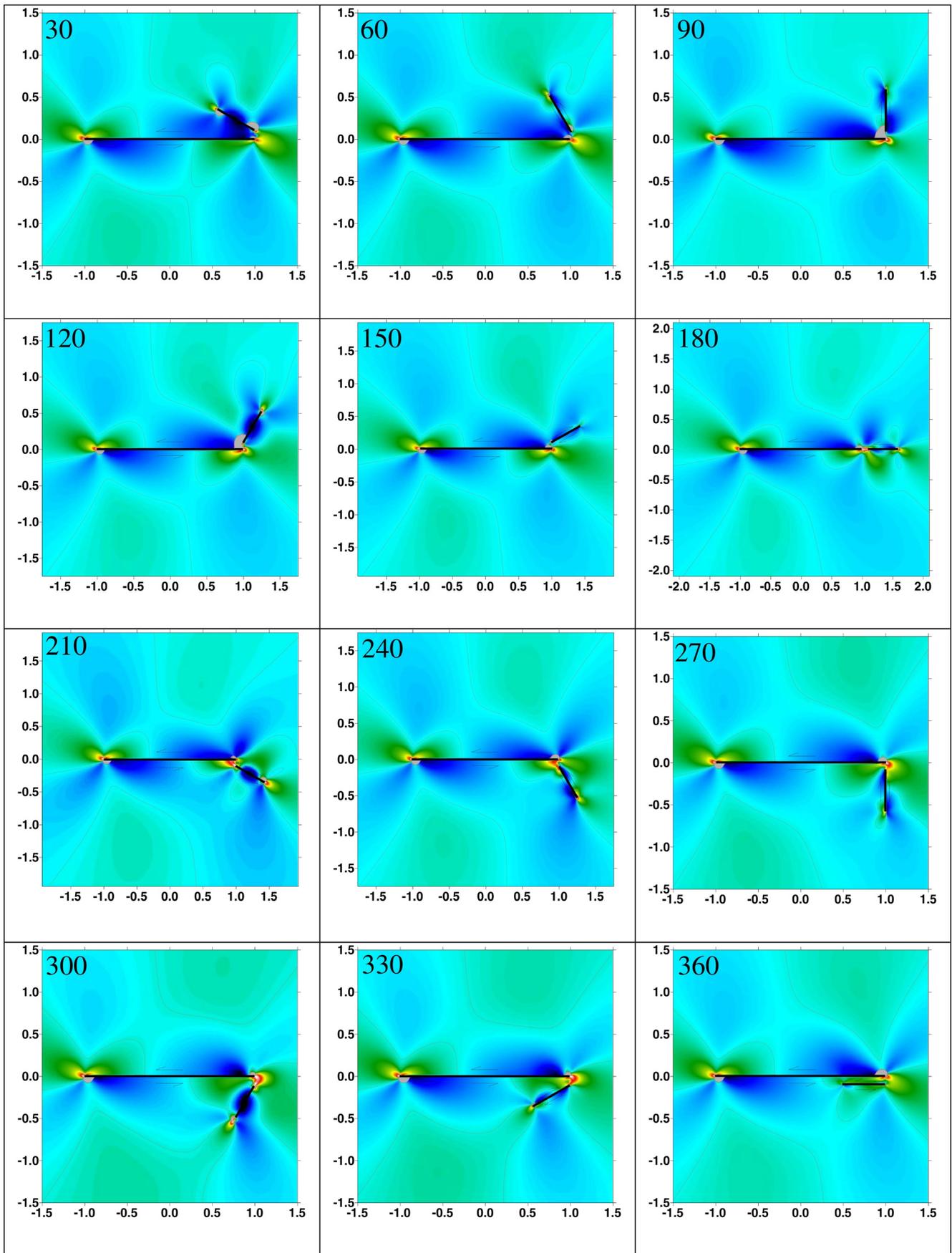


Рис. 14. Распределение значений  $p$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

Fig. 14. Distribution of  $p$  values in case of simultaneous activation of two fractures located at various angles to each other.



**Рис. 15.** Распределение значений  $\tau_C$  при одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу.

**Fig. 15.** Distribution of  $\tau_C$  values in case of simultaneous activation of two fractures located at various angles to each other.

Таблица 2. Сброшенные касательные напряжения для случая одновременной активизации двух трещин под разными углами друг к другу

Table 2. Dropped shear stresses in the case of simultaneous activation of two fractures at different angles to each other

Угол, °	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
Д	-0.48	-0.49	-0.5	-0.486	-0.494	-0.54	-0.53	-0.51	-0.497	-0.51	-0.519	-0.48
К	-0.813	-0.442	0.41	0.82	0.285	-0.81	-1.23	-0.69	0.41	1.06	0.703	-0.35

Примечание. Д – длинная трещина; К – короткая трещина.

Note. Д – long fracture, К – short fracture.

параллельно, а под некоторым углом друг к другу. На рис. 10–15 показаны параметры напряженного состояния вблизи двух одновременно активизировавшихся трещин, одна из которых (большей длины) во всех случаях одинаково расположена относительно ориентации главных напряжений начального напряженного состояния, заданных на бесконечности, а другая, длина которой соотносится с длиной первой как 1 и 4, находится вблизи правого конца длинной трещины и занимает относительно нее разные положения. Отметим, что короткая трещина в разных случаях неодинаково расположена относительно ориентации главных напряжений начального напряженного состояния (см. рис. 1), заданных на бесконечности. Соответственно, значения начального касательного напряжения, действующего на плоскости короткой трещины, разные. Кроме того, в зависимости от угла наклона короткой трещины сдвиг ее бортов может быть как левым, так и правым. Значения сброшенных касательных напряжений на каждой трещине могут по модулю быть выше или ниже начальных в зависимости от того, нагружает или разгружает срабатывание соседней трещины ту зону, в которой находится рассматриваемая трещина.

На каждом рисунке в левом верхнем уголке указано значение угла между короткой и длинной трещинами в градусах. Стрелками показано направление смещения бортов каждой трещины. В табл. 2 даны значения сброшенных касательных напряжений на трещинах, а также значения начальных касательных напряжений на короткой трещине. Видно, что при углах 30° начальное касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  на короткой трещине отрицательное, на обеих трещинах происходит левый сдвиг и трещины взаимно разгружают друг друга, то есть сброшенное касательное напряжение на каждой трещине (то, которое ей пришлось сбросить, чтобы среднее значение касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  на плоскости этой трещины стало нулевым) по модулю ниже начального. То же самое можно сказать о случаях 60° и 360°. В случаях 90°, 120° и 150° также происходит взаимное разгружение трещин, но начальное касательное напряжение на короткой трещине положительно, и сдвиг на ней происходит правый. В случаях 180°, 210° и 240° начальное напряжение на короткой трещине отрицательное, на обеих трещинах левый сдвиг, и мы наблюдаем взаимное нагружение трещин, то есть сброшенные напряжения на трещинах

по модулю выше начальных. Случай 270°, аналогично случаю 90°, характеризуется положительным начальным касательным напряжением и, соответственно, правым сдвигом на короткой трещине, а также взаимным разгружением трещин. В случаях 300° и 330° сдвиг на короткой трещине также правый, но трещины нагружают друг друга.

Перейдем к более детальному рассмотрению рисунков. На рис. 10 показано нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$ . В случаях 30° и 60° зоны повышенного напряжения вблизи концов короткой трещины объединяются с зоной повышенного напряжения вблизи правого конца длинной трещины. В случае 90°, хотя сброшенное касательное напряжение, а значит, и смещение на короткой трещине, достаточно большое, она не оказывает заметного влияния на напряжение  $\sigma_{xx}$ , поскольку короткая трещина перпендикулярна оси  $x$ . При 120° и 150° сдвиг на короткой трещине правый, и зоны повышенного и пониженного напряжения вблизи концов короткой трещины по сравнению с первыми двумя случаями поменялись местами, но мы снова видим объединение с зоной повышенного напряжения вблизи конца длинной трещины. В случае 120° имеется совсем небольшая зона пониженного напряжения в окрестности конца короткой трещины, расположенного ближе к длинной трещине. При 150° зоны пониженного напряжения в соответствующей области нет вообще. Для случая 180° смещения по обеим трещинам наиболее значительны, зоны повышенного и пониженного напряжения вблизи концов трещин ярко выражены. При дальнейшем повороте короткой трещины по часовой стрелке в случаях 210°, 240°, 270°, 300°, 330° наблюдаем объединение уже зон пониженного напряжения и в случае левого, и в случае правого сдвига на короткой трещине. В случае 360° короткая трещина почти целиком оказывается в зоне пониженного напряжения вблизи конца длинной трещины, поэтому области повышенного напряжения вблизи концов короткой трещины крайне малы.

Рассмотрим теперь нормальное напряжение  $\sigma_{yy}$  (см. рис. 11). В случаях 30° и 60° зоны пониженных напряжений вблизи концов короткой трещины сливаются друг с другом и объединяются с зоной пониженного напряжения возле правого конца длинной. Для 90° вклад короткой трещины в картину напряжения

весьма велик (сравним с напряжением  $\sigma_{xx}$  в случае  $90^\circ$ ), зоны повышенных напряжений сливаются, так что напряжения принимают достаточно высокие значения даже на некотором отдалении от концов трещин (белый цвет). То же можно сказать и о случаях  $60^\circ$  и  $120^\circ$ .

В случаях  $150^\circ$  и  $180^\circ$  влияние короткой трещины уже не столь значительно. При  $210^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $330^\circ$  мы наблюдаем разрастание и объединение зон пониженного напряжения, а для  $360^\circ$  области пониженного уровня напряжений менее выражены, а отклонения от исходного поля малы.

Поля касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  (см. рис. 12) интересны тем, что в каждом случае на плоскости длинной трещины видны зоны положительных касательных напряжений (ярко-зеленым показаны изолинии нулевого уровня касательных напряжений), по-разному расположенные в зависимости от положения короткой трещины. Согласно постановке задачи, на плоскости каждой трещины после срабатывания должны установиться касательные напряжения, нулевые в среднем. Для этого необходимо (поскольку новое напряженное состояние неоднородно), чтобы на части плоскости трещины касательное напряжение было положительным, а на части – отрицательным, что мы и наблюдаем на рисунке на длинной трещине. Для короткой же трещины параметр  $\sigma_{xy}$  не столь информативен, поскольку в большинстве случаев не является касательным напряжением в плоскости этой трещины. Исключения составляют случаи  $180^\circ$  и  $360^\circ$ , а также  $90^\circ$  и  $270^\circ$  в силу симметрии тензора напряжений.

Рассмотрим максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  (см. рис. 13). В случае  $30^\circ$  короткая трещина расположена вблизи зоны пониженного максимального касательного напряжения возле правого конца длинной трещины, и эта зона объединяется с зоной пониженного напряжения около середины короткой. Если поворачивать короткую трещину по часовой стрелке, то такого объединения уже не происходит. Заметим, что зоны пониженного напряжения могут оказаться как в середине короткой трещины (случай  $30^\circ$ ,  $120^\circ$ ), так и возле ее концов ( $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$ ) в зависимости от угла, под которым короткая трещина расположена относительно нагрузки. В диапазоне углов  $180^\circ$ – $330^\circ$  происходит объединение зон повышенного максимального касательного напряжения вблизи концов трещин, это напряжение может принимать довольно высокие значения (белый цвет), причем не только вплотную к концам, но и на некотором удалении (случай  $300^\circ$ ). При  $360^\circ$  короткая трещина оказывается в области повышенных касательных напряжений возле правого конца длинной трещины и зоны пониженного напряжения около короткой трещины почти отсутствуют.

Перейдем к рассмотрению среднего давления  $p$

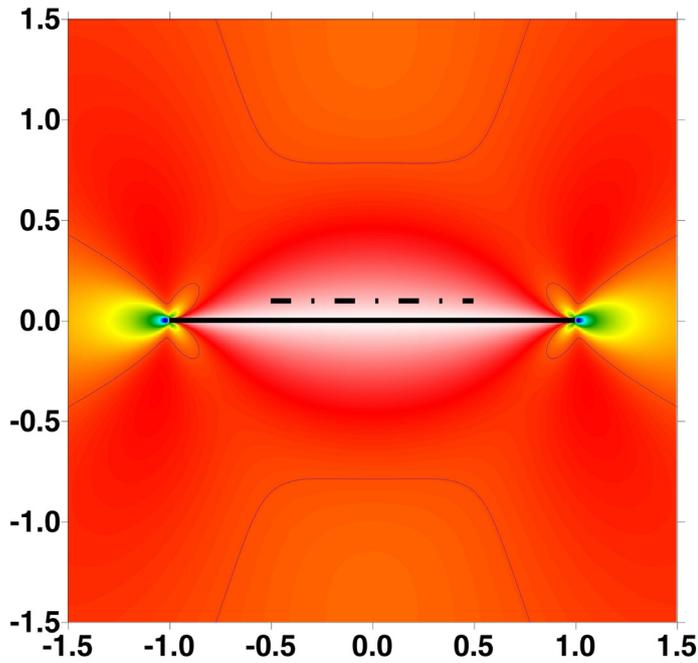
(см. рис. 14). В случае  $30^\circ$  зона пониженного давления вблизи правого конца длинной трещины и зона повышенного давления вблизи конца короткой оказываются рядом и взаимно гасят друг друга. При  $60^\circ$  и  $90^\circ$  зоны повышенного и пониженного давления возле конца короткой трещины, ближнего к длинной, совсем малы. В случае  $120^\circ$  смещение на трещинах происходит в разные стороны и мы наблюдаем слияние зон повышенного и пониженного давления возле соседних концов трещин.

В случае  $180^\circ$  происходит левостороннее смещение на обеих трещинах. В непосредственной близости от соседствующих кончиков трещин плоскость можно условно поделить на четыре сектора: два – повышенного и два – пониженного давления. При  $210^\circ$  зона пониженного давления возле правого конца короткой трещины объединяется с аналогичной зоной возле правого конца длинной. Для диапазона углов  $210^\circ$ – $360^\circ$  происходит наложение зон повышенного давления вблизи короткой трещины и зоны повышенного давления возле правого конца длинной, поэтому среднее давление может достигать довольно больших значений (белый цвет).

Рассмотрим еще один параметр – кулоновское напряжение  $\tau_c$  (выражение (38)), которое позволяет прогнозировать области возможного возникновения мелкомасштабных вторичных разрывных нарушений [Osokina, 2000; 2002] в ситуации, когда почти одновременно активизировались два крупных разрыва разной длины под некоторым углом друг к другу (рис. 15). Из рисунка видно, что наличие короткой трещины в большинстве случаев приводит к уменьшению зон повышенного кулоновского напряжения (по сравнению со случаем одиночной трещины на рис. 4), поскольку около середины трещины происходит снижение значения  $\tau_c$ , а около концов возникают небольшие зоны повышения, как правило, мало влияющие на общую картину. Исключениями можно считать случаи  $300^\circ$  и  $330^\circ$ , когда зона повышенного кулоновского напряжения вблизи левого конца короткой трещины сливается с не примыкающей в остальных случаях ни к одной из трещин зоной повышения напряжения внизу рисунка. В диапазоне углов  $30^\circ$ – $120^\circ$  выше короткой трещины образуются зоны пониженного напряжения.

### 3.3. ДВЕ ТРЕЩИНЫ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ДРУГ ДРУГУ, С РАЗНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ АКТИВИЗАЦИИ

Анализ влияния последовательности активизации двух трещин предварим картиной распределения касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  в окрестности одиночной трещины (рис. 16). Хорошо видно, что вблизи середины трещины имеется область значительного понижения абсолютного значения касательных напряжений в плоскости трещины. Именно эта область является ис-



**Рис. 16.** Распределение касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  для случая единичной трещины. Положение активной трещины показано черной линией, пунктирной линией показано расположение второй трещины, которая в данном случае не активна (нет смещения ее бортов).

**Fig. 16.** Distribution of the shear stresses  $\sigma_{xy}$  for a single fracture. The position of the active fracture is shown by the black line. The dashed line shows the location of the second fracture that is not active in this case (as its borders are not displaced).

точником энергии для сейсмических волн, вызванных движением бортов трещины.

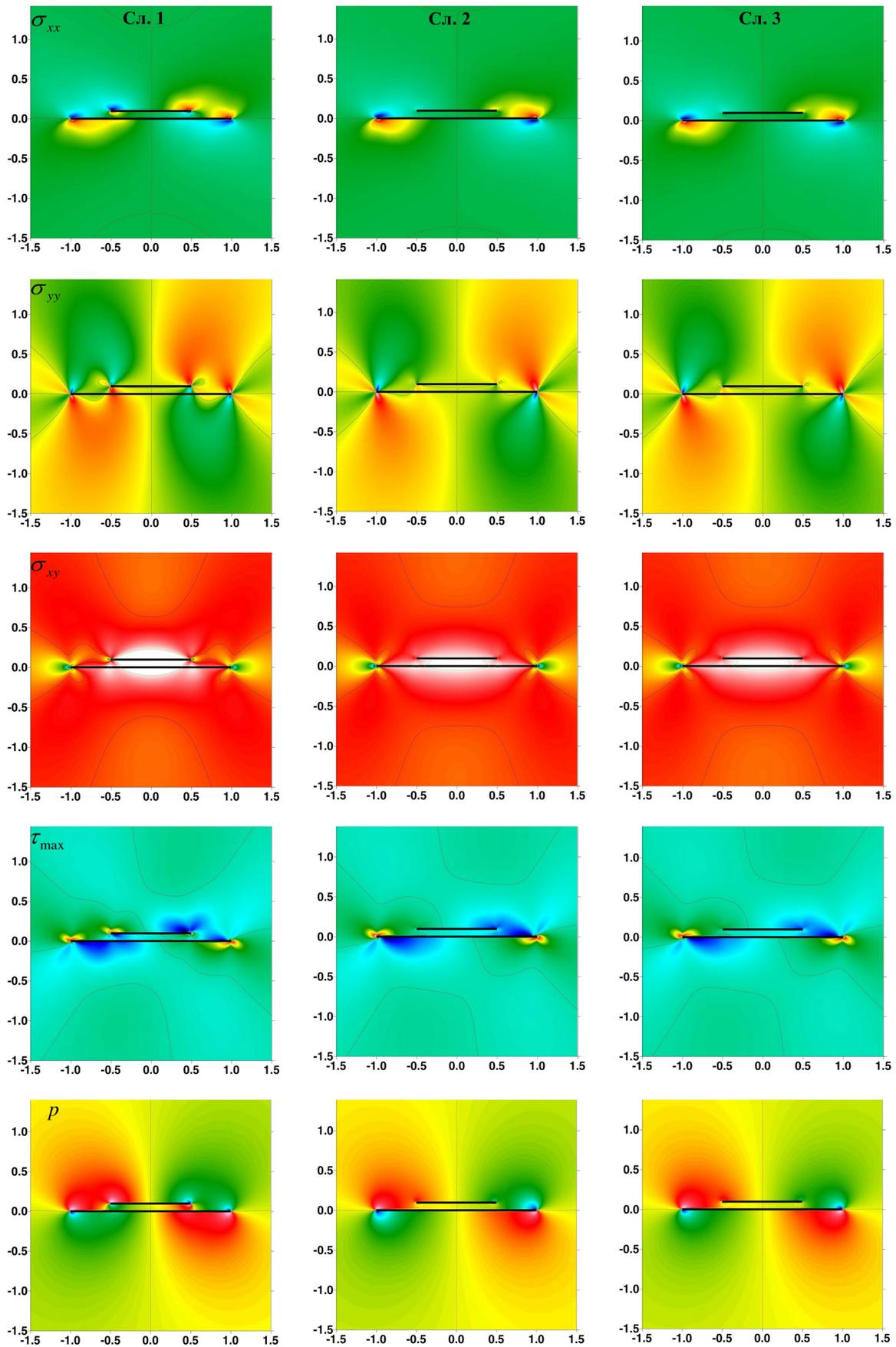
Выясним, как будут отличаться напряжения в том случае, если вблизи середины трещины окажется еще одна параллельная ей трещина, меньшего размера (рис. 16). Пусть длины трещин соотносятся как 1 к 2. Сравним три случая: в первом сначала активизируется короткая трещина, за ней – длинная (рис. 17, левый столбец), во втором – сначала длинная, потом короткая (рис. 17, центральный столбец) и в третьем случае обе трещины активизируются одновременно (рис. 17, правый столбец). Разница между этими случаями определяется как картиной распределения напряжений (рис. 17), так и величинами сброшенных касательных напряжений (табл. 2) на каждой из трещин. В первом случае борта короткой трещины сдвигаются в начальном поле напряжений, а потом «заклеиваются», т.е. на стадии активизации длинной трещины они уже не испытывают дополнительного относительного смещения. Как следствие, последующее смещение бортов длинной трещины хоть и изменяет напряжения вблизи обеих трещин, но уже не влияет на значительный вклад меньшей трещины в возмущенное поле напряжений.

Во втором случае вклад короткой трещины в изменение напряженного состояния, как видно из рисунков, весьма невелик. Это объясняется тем, что во втором случае длинная трещина активизируется первой, так что для короткой трещины начальным является уже не исходное однородное напряженное состояние, а заметно ослабленное относительно него, образовавшееся после активизации первой трещины. Так как на рис. 16 показано касательное напряжение в окрестности одиночной длинной трещины с указанием расположения возникающей следом короткой трещины, то из него видно, что основная «работа» по сбрасыванию касательных напряжений в этом месте уже произведена длинной трещиной, поэтому, чтобы сбросить их до нуля, короткой трещине остается сдвинуться совсем немного, что мы и видим из таблицы 3 – величина сброшенных касательных напряжений на короткой трещине во втором случае мала.

Если обе трещины активизируются одновременно (случай 3, рис. 17, правый столбец), значения сброшенных касательных напряжений незначительно отличаются от значений во втором случае (см. табл. 2), и, как видно из рисунков, параметры напряженного состояния примерно такие же, как и в случае 2 (рис. 17, средний столбец). Это связано с тем, что при одновременном срабатывании влияние меньшей трещины на большую заметно слабее, чем большей на меньшую. Соответственно, качественно картина близка к той, которая возникает, когда первой активизируется длинная трещина, не испытывая влияния короткой, а затем короткая при сильном влиянии длинной. Таким образом, далее подробно сравнивать мы будем первые два случая.

Из картины напряжения  $\sigma_{xx}$  видно, что в первом случае вблизи концов короткой трещины наблюдаются сильные возмущения поля напряжений, причем области повышенного  $\sigma_{xx}$  ниже левого и выше правого конца короткой трещины сливаются с соответствующими областями повышения  $\sigma_{xx}$  вблизи концов длинной трещины. Аналогично, области пониженного напряжения вблизи концов двух трещин также сливаются, так что изолиния уровня напряжений, соответствующего исходному значению, смещается к короткой трещине. Во втором же случае возле короткой трещины имеем лишь небольшое возмущение поля напряжений, почти не влияющее на общую картину. Здесь и далее на рисунках красной линией показана изолиния значения соответствующей компоненты напряжений, отвечающая начальному однородному напряженному состоянию.

Обратимся теперь к касательному напряжению  $\sigma_{xy}$ . В первом случае области пониженного (повышенного по абсолютному значению, но отрицательного по знаку) касательного напряжения вблизи концов длинной трещины дотягиваются до концов короткой. Сама короткая трещина после активизации длинной вся ока-



**Рис. 17.** Параметры напряженного состояния для случая двух параллельных трещин с разной последовательностью активизации (табл. 3).

**Fig. 17.** Stress parameters for the case of two parallel fractures with different activation sequence (Table 3).

Таблица 3. Сброшенные касательные напряжения для случая двух параллельных трещин с разной последовательностью активизации

Table 3. Dropped shear stresses for the case of two parallel fractures with different sequence of activation

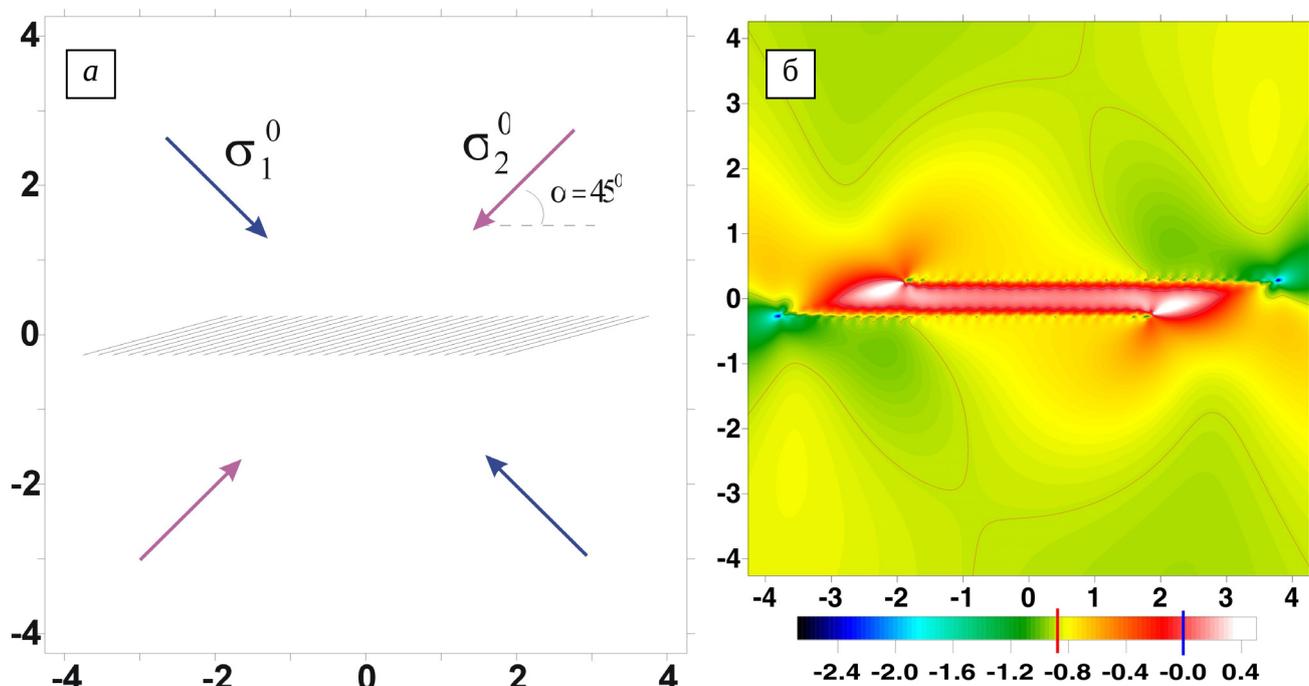
Трещина	Случай 1	Случай 2	Случай 3
Короткая	-0.500	-0.113	-0.126
Длинная	-0.436	-0.500	-0.484

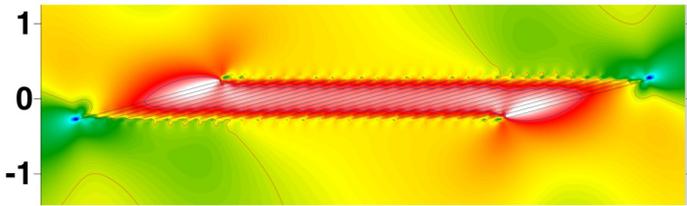
зывается в зоне положительных касательных напряжений, что определяет возможный праводвиговой характер смещений ее бортов при повторной активизации и такой же тип кинематики для возможных мелкомасштабных вторичных разрывных нарушений в ее окрестности. Во втором случае короткая трещина практически не влияет на области пониженных напряжений (по сравнению со случаем одиночной трещины), а напряжения на сработавшей первой длинной трещине местами оказываются положительными, более того, среднее значение касательных напряжений на длинной трещине также имеет положительный знак.

Разница между полями максимальных касательных напряжений заключается в значительно более сильных возмущениях на концах короткой трещины в первом случае по сравнению со вторым. Зона повышенных максимальных касательных напряжений, возникающая на правом конце короткой трещины в первом случае, частично перекрывается зоной пониженных макси-

мальных касательных напряжений вблизи правого конца длинной трещины, тем самым эти зоны несколько снижают интенсивность друг друга.

Распределение всестороннего давления  $p$ , которое равно по значению и противоположно по знаку среднему напряжению  $\sigma_0 = \sigma_i/2$  ( $i = x, y$ ), аналогично нормальному напряжению  $\sigma_{xx}$ . В первом случае изолиния, соответствующая начальному значению давления в исходном однородном напряженном состоянии, смещается к короткой трещине; таким образом, увеличиваются области пониженного всестороннего давления слева внизу от длинной трещины и повышенного всестороннего давления справа внизу. Во втором случае короткая трещина сильного влияния не оказывает. В третьем случае видно, что зоны пониженного всестороннего давления вблизи концов длинной трещины (ярко-голубой цвет) несколько меньше, чем во втором. Это связано с тем, что в третьем случае срабатывание

Рис. 18. Схема задачи (а) и распределение касательных напряжений  $\tau_{ns}$  (б), действующих вдоль плоскостей системы 29 трещин.Fig. 18. The problem chart (a), and distribution of shear stresses,  $\tau_{ns}$  (b) acting along planes of 29 fractures.



**Рис. 19.** Распределение  $\tau_{ns}$  для случая системы эшелона 29 трещин (увеличение рис. 18).

**Fig. 19.** Distribution of  $\tau_{ns}$  for the case of the echelon comprising 29 fractures (see Fig. 18).

короткой трещины сняло часть нагрузки со второй трещины, поэтому смещение по длинной трещине оказалось меньше, чем во втором случае.

### 3.4. СИСТЕМА ЭШЕЛОНИРОВАННЫХ ТРЕЩИН

Рассмотрим систему из 29 параллельных трещин, расположенных под углом около  $15.2^\circ$  к горизонтали (см. схему на рис. 18, а). Подобная ориентация трещин в виде сколов Риделя наблюдается в зонах горизонтального сдвига [Cloos E., 1955; Cloos H., 1928; Riedel, 1929] при экспериментах на влажных глинах. В наших расчетах система трещин конечного числа, но если рассматривать идеализированную зону горизонтального сдвига, то подобная система трещин должна быть неограниченной. Таким образом, получаемые в наших расчетах значения вблизи концевой части системы не будут отвечать указанной идеализированной зоне сдвига. Расстояние между трещинами в наших расчетах составляет приблизительно 0.052 (здесь нормировка линейных размеров также ведется на половину длины трещины), что также близко к наблюдениям в экспериментах. Начальное напряженное состояние однородное, как и во всех предыдущих случаях,  $\sigma_1^0 = 0$ ,  $\sigma_2^0 = -2$ , но угол  $\alpha$  между максимальным из главных напряжений  $\sigma_2^0$  и осью  $x$  равен  $45^\circ$ , то есть между  $\sigma_2^0$  и плоскостью любой из трещин составляет около  $30^\circ$ . Коэффициент трения на трещинах снова равен нулю. При таких условиях на всех трещинах произойдет левый сдвиг.

Свой анализ закономерности распределения напряжений в окрестности системы трещин начнем с касательного напряжения  $\tau_{ns}$ , действующего вдоль плоскости трещин (рис. 18, б, 19). Здесь  $\tau_{ns}$  – касательное напряжение в системе координат  $nOs$ , связанной с направлением простирания трещин. Можно считать, что система  $nOs$  совпадает с системой координат  $x_1Oy_1$ , связанной с первой трещиной (см. рис. 2): ось  $n$  совпадает с осью  $y_1$ , нормальной к поверхности трещины, ось  $s$  – с осью  $x_1$ , соответствующей простиранию

трещины. Согласно постановке задачи, среднее касательное напряжение на всех трещинах после активизации должно стать равным нулю. На рис. 18, 19 синим цветом показана изолиния нулевого значения  $\tau_{ns}$ , а красным – значения, отвечающего касательным напряжениям в исходном однородном напряженном состоянии (см. шкалу в нижней части рис. 18, б). Видно, что вблизи концов каждой трещины касательное напряжение отрицательно (левый сдвиг возможных вторичных разрывных нарушений), а в середине принимает положительные значения (правый сдвиг возможных вторичных разрывных нарушений). На рис. 20 в качестве примера приведены графики касательного напряжения на плоскостях второй слева (а) и пятнадцатой (б) трещин. Интегралы от этих функций вдоль плоскости указанных трещин равны нулю. Отметим также, что отклонения от нулевых значений для крайних трещин системы в 3–5 раз больше, чем для трещин, расположенных в середине системы трещин. Напомним, что в данной постановке коэффициент трения на плоскостях трещин везде считался нулевым и поэтому отклонения на плоскости трещин касательных напряжений от нулевых значений, требуемых точным классическим решением (см. выражения (26)), фактически характеризуют точность нашего приближенного решения.

На рис. 21, а, показано распределение нормального напряжения  $\sigma_{xx}$ . Видно, что в области середин трещин  $\sigma_{xx}$  принимает довольно большие по модулю отрицательные значения (синий цвет). Для интерпретации этого результата на рис. 22 схематично показана деформация участка, расположенного между двумя соседними трещинами. Синим цветом показан прямоугольный участок до активизации трещин, красным – после. В результате смещения бортов трещин нижний край участка смещается влево, верхний – вправо. По субгоризонтальному отрезку (светло-синий цвет до активизации, оранжевый – после) видно, что в горизонтальном направлении материал испытывает укорочение, соответственно возрастает и сжатие в горизонтальном направлении, и величина нормального напряжения  $\sigma_{xx}$ .

На рис. 21, б, можно видеть поле значений нормального напряжения  $\sigma_{yy}$ . После активизации трещин оно получает незначительные изменения как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  (рис. 21, в) по модулю уменьшается почти везде в окрестности рассматриваемой системы трещин и получает значительное увеличение только на маленьких участках вблизи левого конца левой трещины и вблизи правого конца правой трещины, т.е. в концевой зоне исследуемой системы.

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{max}$  увеличивается в области середин трещин (рис. 21, г). Это увеличение связано с увеличением нормального на-

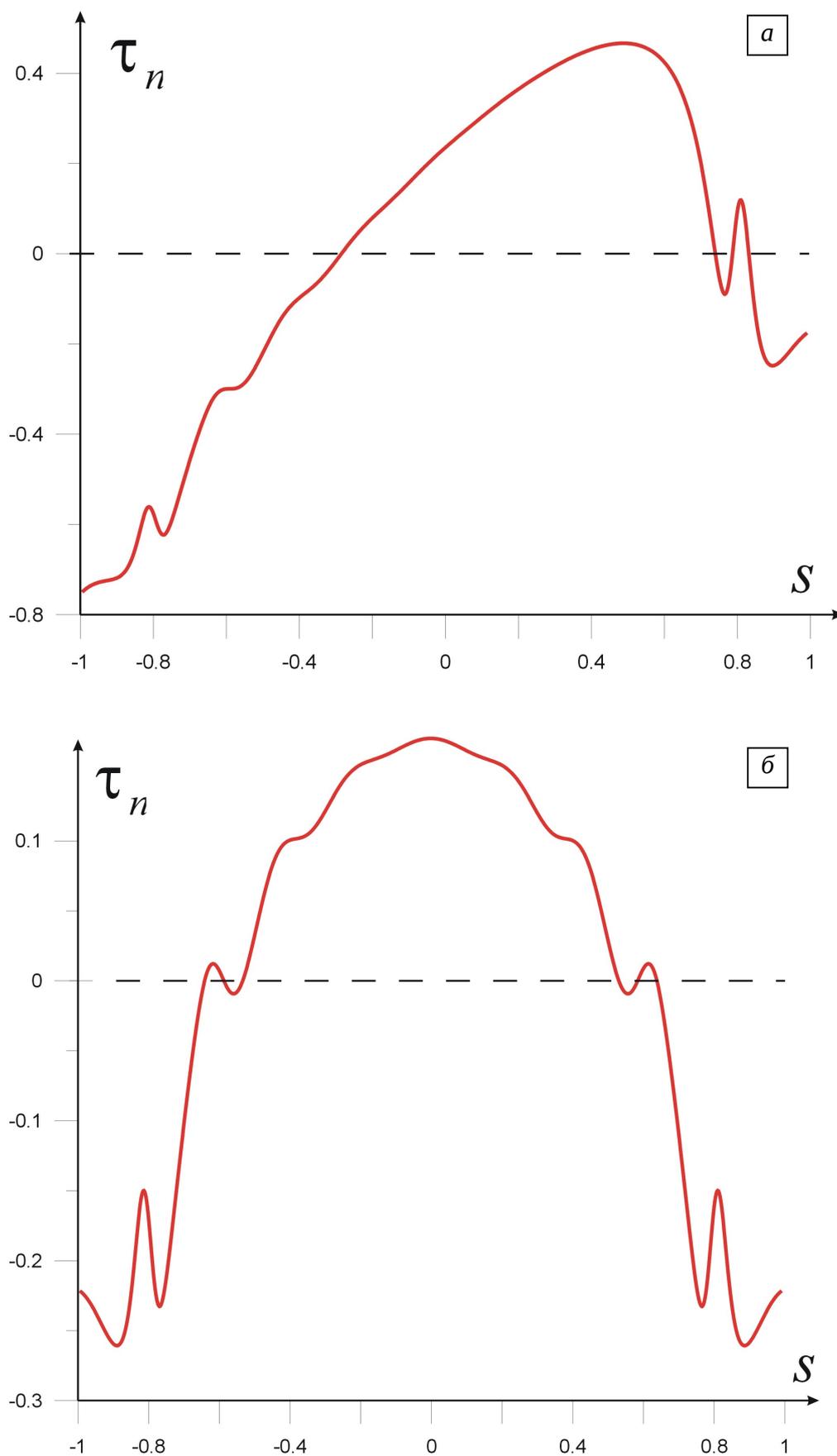


Рис. 20. Графики касательного напряжения на плоскостях второй слева (а) и пятнадцатой (б) трещин. По оси абсцисс отложена координата  $S$  на трещине.

Fig. 20. Curves of shear stresses on planes of the 2nd at-the-left fracture (a) and the 15th fracture (b). X-axis shows coordinate  $S$  at the fracture.

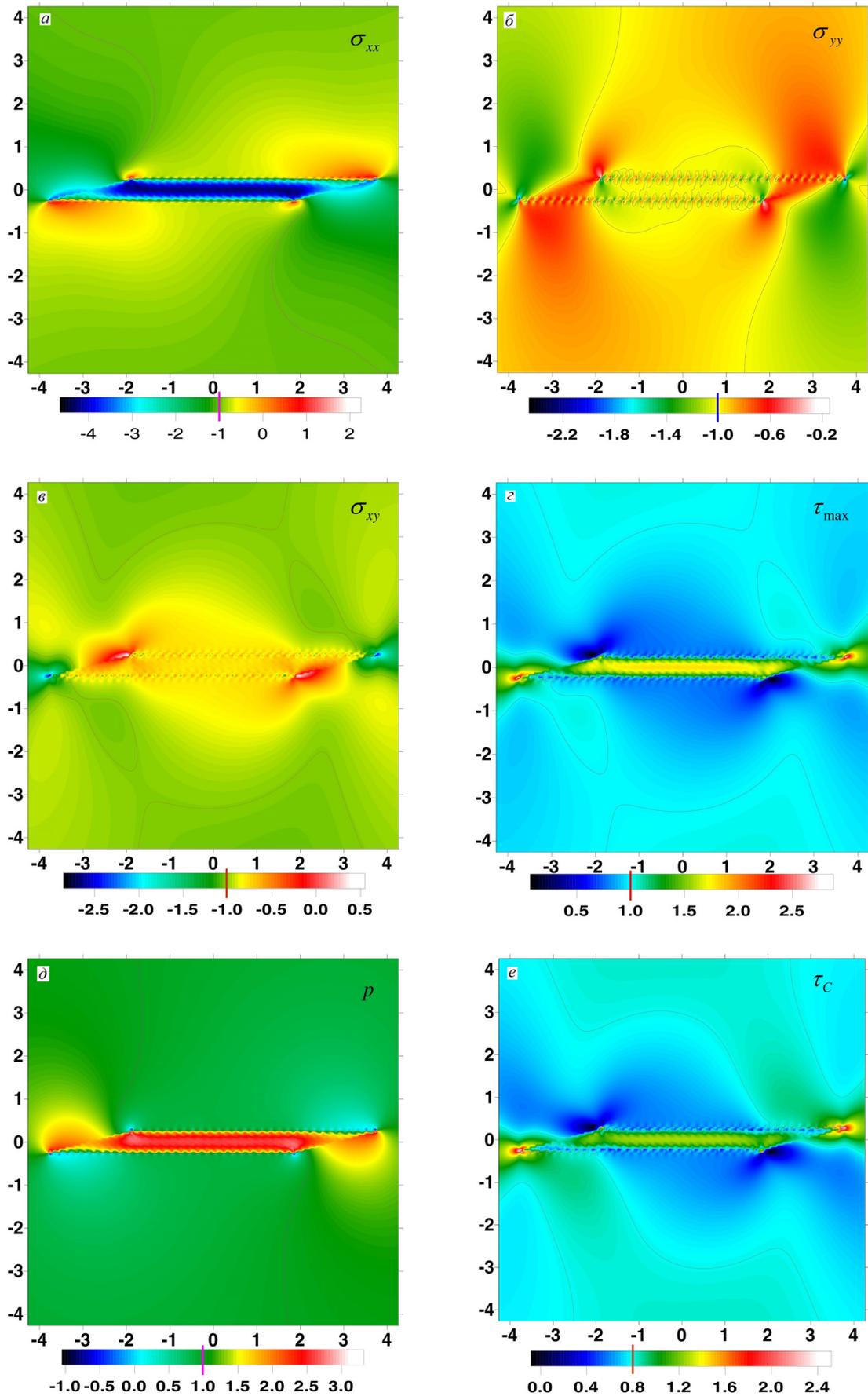
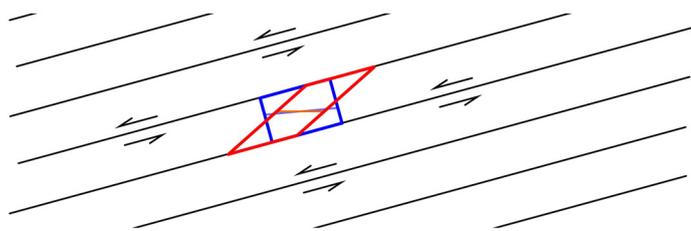


Рис. 21. Параметры напряженного состояния для случая одновременной активизации системы из 29 трещин.

Fig. 21. Stress parameters for the case of simultaneous activation of the system including 29 fractures.



**Рис. 22.** Схема деформации участка материала, расположенного между двумя соседними трещинами системы эшелона 29 трещин.

**Fig. 22.** The deformation pattern of the medium located between two adjacent fractures in the echelon comprising 29 fractures.

пряжения  $\sigma_{xx}$  и влиянием этого напряжения на максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$ . Всестороннее давление  $p$  и кулоново напряжение  $\tau_c$  (рис. 21,  $\delta$ ,  $e$ ) также увеличиваются в области середин трещин вследствие зависимости от нормального напряжения  $\sigma_{xx}$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенное в настоящей статье асимптотическое аналитическое решение задачи о взаимодействии трещин скалывания при принятых нами допущениях может являться эффективным инструментом изучения закономерности распределения напряжений в трещиноватых средах, представленных горными массивами. На нескольких примерах продемонстрированы воз-

можности метода. В настоящей модификации метода закон распределения смещений на трещинах всегда отвечает их симметричному распределению вне зависимости от характера распределения напряжений на трещине. Максимальное значение смещения в этом случае достигается в середине трещины и прямо связано с величиной сброшенных на трещине касательных напряжений. Однако сама концепция построения приближенного решения не отвергает возможности уточнения решения за счет учета тренда в распределении напряжений на разрыве. Построение подобного решения является задачей наших ближайших исследований.

Представленные в настоящей статье первые результаты уже дают возможность их практического приложения. Широко известны представления о «запирающем» влиянии трещин друг на друга. Так, появление вблизи конца развивающегося разрыва ортогональной трещины способно остановить его рост. Выполненные в настоящей статье расчеты показывают, что существуют такие взаимные положения большой и малой трещин, при которых остановку прорастания большого разрыва вдоль своего простирания может осуществить поле напряжений, возмущенное указанной малой трещиной. Также возможна обратная ситуация, когда рост большой трещины вдоль ее простирания облегчается полем напряжений, возмущенным малой трещиной.

Количественные оценки величин сброшенных напряжений при разной последовательности активизации разрывов или при разном взаимном положении большой и малой трещины получены впервые и могут быть использованы для качественной интерпретации природных структур.

#### 5. ЛИТЕРАТУРА

- Basista M., Gross D., 2000. A note on crack interactions under compression. *International Journal of Fracture* 102 (3), 67–72. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007644608705>.
- Byerlee J.D., 1967. Frictional characteristics of granite under high confining pressure. *Journal of Geophysical Research* 72 (14), 3639–3648. <http://dx.doi.org/10.1029/JZ072i014p03639>.
- Byerlee J.D., 1978. Friction of rocks. *Pure and Applied Geophysics* 116 (4–5), 615–626. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00876528>.
- Chinnery M.A., 1961. The deformation of the ground around surface fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51 (3), 355–372.
- Chinnery M.A., 1963. The stress changes that accompany strike-slip faulting. *Bulletin of the Seismological Society of America* 53 (5), 921–932.
- Cloos E., 1955. Experimental analysis of fracture patterns. *Geological Society of America Bulletin* 66 (3), 231–256. [http://dx.doi.org/10.1130/0016-7606\(1955\)66\[241:EA0FP\]2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1130/0016-7606(1955)66[241:EA0FP]2.0.CO;2).
- Cloos H., 1928. Experimente zur inneren Tektonik. *Zentralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Abhandlungen B* 12 (1928), 609–621.
- Gakhov F.D., 1977. Marginal problems. Nauka, Moscow, 640 p. (in Russian) [Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.].
- Horii H., Nemat-Nasser S., 1985. Elastic fields of interacting inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures* 21 (7), 731–745.

- Kachanov M.L., 1972. Continually theory of faulting. *Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solid body* 2, 54–59 (in Russian) [Качанов М.Л. К континуальной теории среды с трещинами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 2. С. 54–59].
- Kachanov M., 1993. Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in Applied Mechanics* 30, 259–445. [http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70176-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70176-5).
- Kostrov B.V., Friedman V.N., 1975. Mechanics of brittle fracturing under compression. In: Earthquake foci physics. Nauka, Moscow, p. 30–45 (in Russian) [Костров Б.В., Фридман В.Н. Механика хрупкого разрушения при сжатии // Физика очага землетрясений. М.: Наука, 1975. С. 30–45].
- Landau L.D., Lifshitz E.M., 1986. Theory of elasticity. 3rd edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, 195 p.
- Li D.F., Li C.F., Shu S.Q., Wang Z.X., Lu J., 2008. A fast and accurate analysis of the interacting cracks in linear elastic solids. *International Journal of Fracture* 151 (2), 169–185. <http://dx.doi.org/10.1007/s10704-008-9249-8>.
- Muskhelishvili N.I., 1966. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Nauka, Moscow, 707 p. (in Russian) [Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.].
- Nazarov S.A., Polyakova O.R., 1990. Stress intensity factors for parallel cracks lying close together in a plane region. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 54 (1), 105–115. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90096-S](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(90)90096-S).
- Osokina D.N., 1987a. The relationship of displacement along faults with tectonic stress fields and some problems of rock mass destruction. In: Fields of stress and strain in the Earth's crust. Nauka, Moscow, p. 120–135 (in Russian) [Осокина Д.Н. Взаимосвязь смещений по разрывам с тектоническими полями напряжений и некоторые вопросы разрушения горного массива // Поля напряжений и деформаций в земной коре. М.: Наука, 1987а. С. 120–135].
- Osokina D.N., 1987b. On hierarchical properties of the tectonic stress field. In: Fields of stress and strain in the Earth's crust. Nauka, Moscow, p. 136–151 (in Russian) [Осокина Д.Н. Об иерархических свойствах тектонического поля напряжений // Поля напряжений и деформаций в земной коре. М.: Наука, 1987б. С. 136–151].
- Osokina D.N. 2000. The study of mechanisms of rock mass deformation in the fault zone on the basis of 3D stress field studies (mathematical modelling). In: Mikhail V. Gzovsky and development of tectonophysics. Nauka, Moscow, p. 220–245 (in Russian) [Осокина Д.Н. Исследование механизмов деформирования массива в зоне разрыва на основе изучения трехмерного поля напряжений (математическое моделирование) // М.В. Гзовский и развитие тектонофизики. М.: Наука, 2000. С. 220–245].
- Osokina D.N., 2002. The stress field, destruction and mechanisms of the geological medium deformation in the fault zone (mathematical modeling). In: Tectonophysics today. Publishing House of Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, p. 129–174 (in Russian) [Осокина Д.Н. Поле напряжений, разрушение и механизмы деформирования геосреды в зоне разрыва (математическое моделирование) // Тектонофизика сегодня. М.: Изд-во ИФЗ РАН, 2002. С. 129–174].
- Osokina D.N., Friedman V.N., 1987. The study of structural regularities of the stress field in the vicinity of the shear rupture with friction of its sides. In: Fields of stress and strain in the Earth's crust. Nauka, Moscow, p. 74–119 (in Russian) [Осокина Д.Н., Фридман В.Н. Исследование закономерностей строения поля напряжений в окрестностях сдвигового разрыва с трением между берегами // Поля напряжений и деформаций в земной коре. М.: Наука, 1987. С. 74–119].
- Panasyuk V.V., 1968. The limit equilibrium of brittle bodies with fractures. Naukova Dumka, Kiev, 246 p. (in Russian) [Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова Думка, 1968. 246 с.].
- Panin V.E., 1998. Fundamentals of physical mesomechanics. *Fizicheskaya mezomekhanika* 1 (1), 5–22 (in Russian) [Панин В.Е. Основы физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5–22].
- Rebetskii Yu.L., Lermontova A.S., 2010. Analytical solution of the problem for a set of shear fractures with coulomb friction. *Doklady Earth Sciences* 435 (2), 1698–1703. <http://dx.doi.org/10.1134/S1028334X10120305>.
- Rebetsky Yu.L., 2008. Mechanism of tectonic stress generation in the zones of high vertical movements. *Fizicheskaya mezomekhanika* 11 (1), 66–73 (in Russian) [Ребецкий Ю.Л. Механизм генерации тектонических напряжений в областях больших вертикальных движений // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 1. С. 66–73].
- Rebetsky Yu.L., Mikhailova A.V., 2011. The role of gravity in formation of deep structure of shear zones. *Geodynamics & Tectonophysics* 2 (1), 45–67. <http://dx.doi.org/10.5800/GT-2011-2-1-0033>.
- Rebetsky Yu.L., Osokina D.N., Ektov V.V., 2002. An approximate solution of the elasticity problem for a set of shear fractures. In: Tectonophysics today. Publishing House of Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, p. 173–185 (in Russian) [Ребецкий Ю.Л., Осокина Д.Н., Эктон В.В. О приближенном решении задачи теории упругости для совокупности сколовых трещин // Тектонофизика сегодня. М.: Изд-во ИФЗ РАН, 2002. С. 173–185].
- Riedel W., 1929. Zur mechanic geologischer brucherscheinungen. *Zentralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie* Abt. B. 30, 354–368.
- Savruk M.P., 1981. The 2D problem of elasticity for bodies with fractures. Naukova Dumka, Kiev, 323 p. (in Russian) [Саврук М.П. Двухмерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова Думка, 1981. 323 с.].
- Sobolev G.A., Ponomarev A.V., 2003. Physics of earthquakes and precursors. Nauka, Moscow, 269 p. (in Russian) [Соболев Г.А., Пономарев А.В. Физика землетрясений и предвестники. М.: Наука, 2003. 269 с.].

Vakulenko A.A., Kachanov M.L., 1971. Continually theory of faulting. *Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solid body* 4, 159–167 (in Russian) [Вакуленко А.А., Качанов М.Л. Континуальная теория среды с трещинами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 4. С. 159–167].



**Лермонтова Анастасия Сергеевна**, м.н.с.  
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН  
123995, ГСП-5, Москва Д-242, ул. Большая Грузинская, 10, Россия  
Тел.: 84992549350; ✉ e-mail: [asyal@pochta.ru](mailto:asyal@pochta.ru)

**Lermontova, Anastasia S.**, Junior Researcher  
Schmidt Institute of Physics of the Earth, RAS  
10 Bol'shaya Gruzinskaya street, Moscow D-242 123995, GSP-5, Russia  
Tel.: 84992549350; ✉ e-mail: [asyal@pochta.ru](mailto:asyal@pochta.ru)



**Ребецкий Юрий Леонидович**, докт. физ.-мат. наук, зав. лабораторией тектонофизики им. М.В. Гзовского  
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН  
123995, ГСП-5, Москва Д-242, ул. Большая Грузинская, 10, Россия  
Тел.: 849925493050; e-mail: [reb@ifz.ru](mailto:reb@ifz.ru)

**Rebetsky, Yuri L.**, Doctor of Physics and Mathematics, Head of M.V. Gzovsky Laboratory of Tectonophysics  
Schmidt Institute of Physics of the Earth, RAS  
10 Bol'shaya Gruzinskaya street, Moscow D-242 123995, GSP-5, Russia  
Tel.: 849925493050; e-mail: [reb@ifz.ru](mailto:reb@ifz.ru)